Основы теории функций комплексного переменного.

Н.И. Дубровин

Содержание

Введение

Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, получаемое из поля действительных чисел $\mathbb{R}$ присоединением корня квадратного из -1, оказывается алгебраически замкнутым (см. теорему 17.3): всякий многочлен, не равный константе, имеет хотя бы один комплексный корень. По сравнению с полем действительных чисел, поле комплексных чисел лишено линейной упорядоченности, естественным образом согласованной с операциями сложения и умножения, однако оно наследует структуру нормированности, т.е. модуля, который обладает всеми стандартными свойствами: модуль произведения, суммы, неотрицательность и т. п.

Описанные выше свойства поля $\mathbb{C}$ приводят к анализу функций комплексной переменной более совершенному чем анализ функций действительной переменной. Так, например, комплексная экспонента e^z порождает тригонометрические функции $\sin z$, $\cos z$, а также гиперболические функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$. Мировые константы, – числа e и π, – также происходят от комплексной экспоненты. Теория функций комплексного переменного может быть названа иначе как теория аналитических функций, т.е. функций представимых в виде суммы степенного ряда

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots$$

и во многом похожих на многочлены.

Одна из вершин теории функций комплексного переменного – формула Коши, позволяющая находить значения аналитической функции в круге, коль скоро известные ее значения на окружности (см. уравнение (32)). Это приводит к принципу аналитического продолжения: если две аналитические функции совпадают на сколь угодно малой кривой (тем более в некотором малом круге), то они совпадают всюду. Иными словами, знание аналитической функции локально, в произвольно малой окрестности какой-либо точки, однозначно восстанавливает всю функцию в целом. Эта гармоничная связь локального и глобального проявляется наиболее отчетливо в основной формуле вычисления интеграла по замкнутому контуру; такой интеграл может быть найден посредством локальных величин – вычетов, которые представляют важнейшую числовую характеристику тех точек, в которых нарушается аналитичность (см. теорему 20.4).

Совершенство теории функций комплексного переменного проявляется и другом – она может быть изложена независимо от теории функций действительной переменной. Единственный фундамент теории функций комплексного переменного – поле действительных чисел с аксиомами поля, аксиомой Архимеда (для любого действительного числа r найдется натуральное число n, превосходящее r) и аксиомой непрерывности (любое непустое и ограниченное сверху множество действительных чисел имеет точную верхнюю грань). Однако, во избежании громоздкости рассуждений, в данном пособии используются и считаются читателю известными основные факты дифференциального и и интегрального исчисления функции одной действительной переменной, а также некоторые сведения из теории рядов и кратных интегралов.

В пособии изложены именно основы теории функций комплексного переменного с многочисленными примерами. Автор тщательно избегал технически сложные доказательства, делая акцент на применение определений, формул и теорем при решении стандартных задач.

1 Поле комплексных чисел

Впервые комплексные числа появились в труде Дж. Кардано "Великое искусство, или Об алгебраических правилах" (1545 г., Милан, Италия). Пользу этих новых чисел, называемых в то время "мнимыми величинами", оценил Р. Бомбелли (1572 г., Болонья, Италия), применяя их для решения кубических уравнений. Долгое время время сущность и роль комплексных чисел оставалась загадочной. Известно, например, что И. Ньютон не включал "мнимые величины" в понятие числа. Другому создателю дифференциального исчисления Г. Лейбницу принадлежит фраза "Мнимые числа – это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием".

Подобно тому как задача об измерении диагонали квадрата со стороной единица или, на алгебраическом языке, – решение уравнения $x^2 = 2$ приводит к появлению иррациональных чисел и тем самым приводит к расширению поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ до поля действительных чисел $\mathbb{R}$, так и потребность находить корни у любого квадратного трехчлена, например, у трехчлена x^2+1, приводит к появлению комплексных чисел и, в частности, к корню квадратному из -1.

Определение 1.1. *Полем комплексных чисел* называется наименьшее поле, содержащее $\mathbb{R}$ как подполе, в котором уравнение $x^2 + 1 = 0$ имеет корень.

Теорема 1.2. *Поле комплексных чисел существует и единственно с точностью до изоморфизма над полем действительных чисел.*

Доказательство. Докажем сначала единственность. Пусть P – поле комплексных чисел. Обозначим через $i_P \in P$ решение уравнения $x^2 + 1 = 0$. Рассмотрим множество $\tilde{P} = \{a + b \cdot i_P \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Проверим, что это множество замкнуто относительно сложения и умножения и тем самым образует подкольцо в P:

$$(a_1 + b_1 i_P) + (a_2 + b_2 i_P) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i_P;$$

$$(a_1 + b_1 i_P) \cdot (a_2 + b_2 i_P) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i_P.$$

В силу того, что $i_P \notin \mathbb{R}$, получаем, что элемент $a+bi_P$ равен нулю тогда и только тогда, когда либо $a=0$ либо $b=0$. Если $a+bi_P \neq 0$, то элемент

$$\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i_P \in \tilde{P}$$

является обратным к элементу $a+bi_P$, что проверяется прямым перемножением. Доказано, что $\tilde{P}$ есть подполе поля P. В виду минимальности P, получаем равенство $\tilde{P}=P$. Если $Q=\mathbb{R}+i_Q\mathbb{R}$ – другое поле комплексных чисел, где $i_Q^2=-1$, то отображение $a+b\cdot i_P \to a+i_Q\cdot b$ задает изоморфизм первого поля на второе. Этот изоморфизм оставляет поле действительных чисел, т.е. чисел вида $a+0\cdot i_p = a+0\cdot i_Q$, на месте.

Из доказательства единственности вытекает и одна из возможных конструкций поля комплексных чисел: пусть $\mathbb{C}$ – множество пар (x,y) с действительными компонентами x,y. Определим на множестве $\mathbb{C}$ сложение и умножение следующим способом:

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2);$$

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+y_1x_2).$$

Прямым способом проверяются аксиомы кольца – ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность. Роль единичного элемента играет пара $(1,0)$, которую будем обозначать просто как 1 и, далее, будем отождествлять с действительным числом 1. Пару $(0,1)$ обозначим i и назовем *комплексной единицей*. Имеем:

$$i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1,0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)=-1.$$

Тем самым $\mathbb{C}$ содержит решение уравнения $x^2+1=0$. Далее, поле действительных чисел вкладывается в кольцо $\mathbb{C}$ посредством отображения $x\to(x,0)$. Это значит, что

$$(x_1,0)+(x_2,0)=(x_1+x_2,0) \text{ и } (x_1,0)\cdot(x_2,0)=(x_1\cdot x_2,0)$$

а также разным числам $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ соответствуют разные пары $(x_1,0)$ и $(x_2,0)$. В связи с этим, будем отождествлять действительное число x с парой $(x, 0) \in \mathbb{C}$ и будем писать x вместо пары $(x, 0)$. Тогда

$$(x, y) = x + yi = x + iy \text{ и } x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Для завершения доказательства теоремы остается проверить, что каждое ненулевое комплексное число обратимо. Если $x + iy \neq 0$, то $x^2 + y^2 \neq 0$ и

$$(x + iy) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{yi}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(x + iy)(x - iy)}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1.$$

□

Пример 1.3. Вычислим:

$$(2 + i)(3 - 2i) = 6 + 3i - 4i - 2i^2 = 6 - i + 2 = 8 - i$$

$$i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad (1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i$$

Число x называется *действительной частью* комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $\operatorname{Re} z$, а y называется *мнимой частью* и обозначается $\operatorname{Im} z$. Комплексные числа изображаются точками на плоскости Oxy или векторами с начальной точкой в начале координат. Горизонтальная ось Ox называется *действительной осью*, а вертикальная ось Oy называется *мнимой осью*. На рис. 1, а) изображено комплексное число $2 + 3i$. Находим: $\operatorname{Re}(2 + 3i) = 2$ и $\operatorname{Im}(2 + 3i) = 3$.

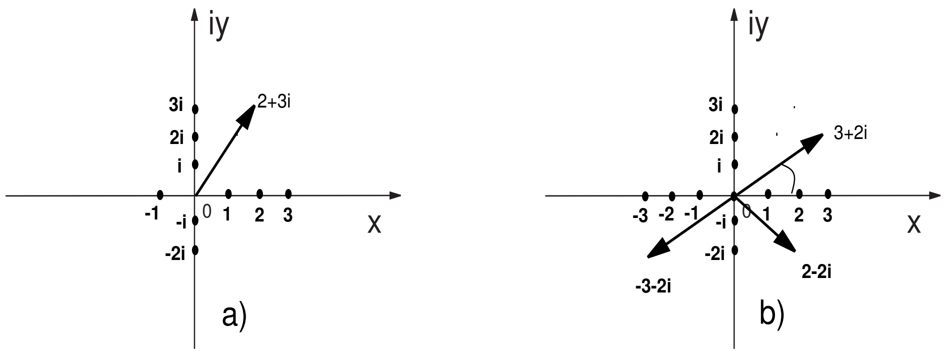

Рис. 1: Поле комплексных чисел

Определение 1.4. Комплексное число $\overline{z} = x - iy$ называется *комплексно сопряженным* к $z = x + iy$. Отображение $z \to \overline{z}$ называется *сопряжением.*

Сопряжение является биективным отображением комплексной плоскости на себя. С геометрической точки зрения операция сопряжение это не что иное как отражение относительно действительной оси.

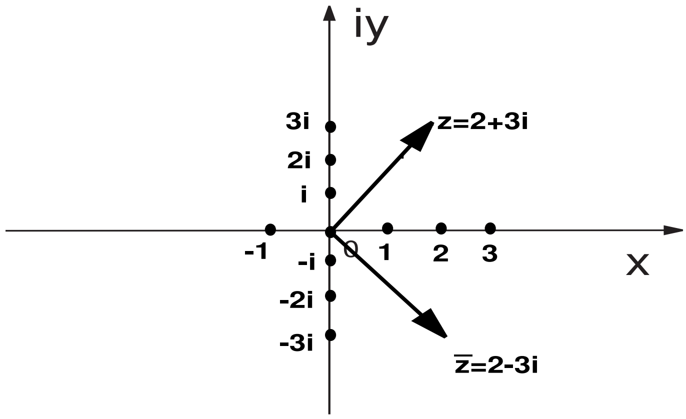

Рис. 2: Сопряжение

Равенство $\overline{z} = z$ имеет место тогда и только тогда, когда $z \in \mathbb{R}$. Кроме этого, сопряжение обладает свойством гомоморфности по отношению к сложению и умножению:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}.$$

Проверим второе равенство. Обозначим $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i} =$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) - (x_1y_2 + y_1x_2)i = (x_1 - iy_1)(x_2 - y_2 i) = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$$

Как и всякая симметрия, сопряжение обладает свойством инволютивности: $\overline{\overline{z}} = z$.

Определение 1.5. Величина $z\overline{z} = x^2 + y^2$ называется *нормой комплексного числа* $z = x+iy$, а корень квадратный из нормы называется *модулем* и обозначается $|z|$.

Имеем: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Заметим, что норма как и модуль являются неотрицательными действительными величинами и каждая их них равна 0 тогда и только тогда, когда само комплексное число нулевое. Понятие нормы приводит к следующему правилу деления комплексных чисел: для того, чтобы разделить одно комплексное число на другое надо числитель и знаменатель дроби умножить на величину сопряженную знаменателю.

Пример 1.6.

$$\frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Теорема 1.7 (свойства модуля). *Для любых комплексных чисел* z_1, z_2 *имеют место соотношения:*

а) $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$, $|z_1/z_2| = |z_1| \,/\, |z_2|$;

б) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *(неравенство треугольника);*

в) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$;

г) *если* $x \in \mathbb{R}$, *то модуль* $|x| = \sqrt{x^2}$ *совпадает с* x *в случае* $x \geq 0$ *и совпадает с* $-x$ *в случае* $x < 0$.

Доказательство. Имеем:

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)} = z_1\overline{z}_1 \cdot z_2\overline{z}_2 = |z_1|^2\,|z_2|^2\,,$$

откуда следует первое равенство. Второе равенство есть следствие первого. Далее, неравенство треугольника эквивалентно следующему:

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2\,|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2$$

или

$$(z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) \leq z_1\overline{z}_1 + 2\,|z_1|\,|z_2| + z_2\overline{z}_2.$$

Сокращая левую и правую часть на $z_1\overline{z}_1$ и $z_2\overline{z}_2$, получим

$$z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 \leq 2\,|z_1|\,|z_2|\,.$$

Обозначая $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ и вычисляя $z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 2(x_1x_2 + y_1y_2)$, сводим последнее неравенство к неравенству Коши-Буняковского:

$$(x_1x_2 + y_1y_2) \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2},$$

которое доказывается еще одним возведением в квадрат.

Утверждение в) следует из неравенства треугольника:

$$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|\,,$$

откуда $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$. Аналогично доказывается неравенство, $|z_2| - |z_1| \leq |z_1 - z_2|$. Из этих двух неравенств следует утверждение в). □

Следствие. *Множество комплексных чисел с единичным модулем образует подгруппу мультипликативной группы* $\mathbb{C}^*$. *Обозначим эту подгруппу* $\mathbb{S}$*:*

$$\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}\,.$$

Назовем $\mathbb{S}$ ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТЬЮ. *Любое ненулевое комплексное число* z *можно записать в виде* $z = r\cdot a$, *где* $r \in \mathbb{R}^{>0}$ *и* $a \in \mathbb{S}$. *Такого рода запись единственна, причем* $r = |z|$, $a = \frac{z}{|z|}$. *Иными словами, имеет место разложение группы* $\mathbb{C}^*$ *в прямое произведение* $\mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{S}$.

ЗАДАЧИ

1. Вычислить:

$$a)\quad \frac{3-i}{1+i},\quad b)\quad (1+i)^3,\quad c)\quad i^n,$$

$$d)\quad (\overline{2+4i})(1-i),\quad e)\quad (\sqrt{3}+i)^{12},\quad f)\quad (1-i)^{20}.$$

2. Нарисовать на комплексной плоскости линии, заданные равенством:

   $a)$ $|z-2| = 3$, $b)$ $|\mathrm{Re}\, z| = 2$, $c)$ $\mathrm{Im}\, z = 3$, $d)^*$ $|z-2| + |z+2| = 5$

3. Нарисовать на комплексной плоскости области, заданные неравенством:

   $a)$ $|z-2| \leq 3$, $b)$ $-1 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 2$, $c)$ $|\mathrm{Im}\, z| \leq 3$, $d)^*$ $|z-2| - |z+2| > 3$

4. Решить систему линейных уравнений над полем комплексных чисел
$$(1+i)z_1 + 2iz_2 = -1+i, \quad 2z_1 + (1-i)z_2 = 3+i$$
.

5. Решить уравнение $\frac{z+i}{z-i} = 2+i$.

6. Доказать, что множество 2×2-матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ над полем действительных чисел есть поле комплексных чисел, в котором комплексной единицей служит матрица $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2 Последовательности и ряды комплексных чисел.

Определение 2.1. Последовательность комплексных чисел z_n $(n \in \mathbb{N})$ стремится к комплексному числу z^*, если для любого действительного числа $\varepsilon > 0$, сколь бы мало оно ни было, найдется номер N такой, что $|z_n - z^*| < \varepsilon$, как только $n \geq N$.

Если $z_n = x_n + iy_n$ и $z^* = x^* + iy^*$, то равенство $\lim z_n = z^*$ равносильно тому, что $x_n \to x^*$ и $y_n \to y^*$ одновременно, так как

$$|z_n - z^*| < \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} |x_n - x^*| < \varepsilon \\ |y_n - y^*| < \varepsilon \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} |x_n - x^*| < \varepsilon \\ |y_n - y^*| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow |z_n - z^*| < \sqrt{2}\cdot\varepsilon.$$

Имеют место обычные свойства предела – предел суммы, произведения, частного. Предел константной последовательности существует и равен этой константе. Критерий Коши также выполняется для последовательностей комплексных чисел: если последовательность $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что как только $n, m \geq N$, так $|z_n - z_m| < \varepsilon$, то последовательность z_n имеет предел.

Суммой ряда $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ называется предел частичных сумм $s_n = z_1 + z_2 + ... + z_n$. Этот ряд *сходится абсолютно*, если сходится ряд $\sum_{j=0}^{\infty} |z_j|$.

Из абсолютной сходимости следует сходимость ряда. Абсолютная сходимость проверяется с использованием известных признаков (например, Даламбера, Коши и т.п.) для знакопостоянных рядов.

Пример 2.2. Установим абсолютную сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n^2} = 1 + i + \frac{i^2}{2^2} + \frac{i^3}{3^2} + \dots \tag{1}$$

пользуясь интегральным признаком Коши. Действительно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{i^n}{n^2} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, так как интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$ сходится. Заметим, что сумма ряда (1) может быть преобразована так:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n^2} = \left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) + i\left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right).$$

Напомним, что в курсе анализа функций действительной переменной *основание натуральных логарифмов* или *число e* определяется как предел последовательности $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Другое представление числа e в виде суммы ряда имеет вид:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{2}$$

Это число и в анализе функций комплексного переменного играет важнейшую роль. Известно, что $e \approx 2,71$.

ЗАДАЧИ

1. Найти предел $\lim \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$.

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right)^n$.

3. При каких $z \in \mathbb{C}$ последовательность z^n имеет предел?

3 Топология комплексной плоскости

Топология комплексной плоскости в общем ничем не отличается от топологии евклидовой плоскости. Однако понятие модуля комплексного числа позволяет не только задать эту топологию, но и определить такие понятия как окрестность, ограниченность, бесконечно удаленную точку самым "экономным" способом.

При определении предела функции или последовательности важную роль играет понятие окрестности точки z_0. Во-первых, определим "стандартную" окрестность – круг без границы радиуса $\rho > 0$ с центром в точке z_0. Он задается неравенством $|z - z_0| < \rho$. В общем, *окрестностью точки* z_0 называется любое открытое множество комплексных чисел, содержащее точку z_0. При этом подмножество $G \subseteq \mathbb{C}$ называется *открытым*, если вместе с каждой точкой множество G содержит и круг достаточно малого радиуса с центром в этой точке. Подмножество $D \subseteq \mathbb{C}$ называется *замкнутым*, если дополнение $\mathbb{C} \setminus D$ открыто, т. е. если для любой точки $z_0 \notin D$ найдется число $\rho > 0$ такое, что круг $|z - z_0| < \rho$ не пересекается с D. На следующем рисунке изображены: a) стандартная окрестность точки z_0, b) открытая область G, c) замкнутая область D, d) область M не являющаяся ни открытой, ни замкнутой.

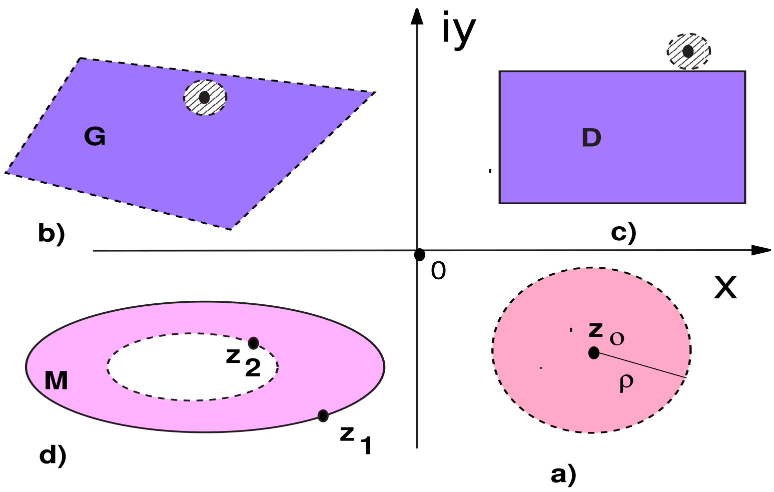

Рис. 3: Топология комплексной плоскости.

Если M – какая-либо область на комплексной плоскости, то точка $z_0 \in \mathbb{C}$ называется *граничной для этой области*, если любой круг с центром в z_0 имеет общие точки как с областью M так и с дополнением $\mathbb{C} \setminus M$. На рисунке d) точки z_1 и z_2 – граничные, хотя первая принадлежит M, а вторая не принадлежит. Множество граничных точек области M обозначаем ∂M и называем *границей области* M.

Отметим без доказательства простые свойства открытых и замкнутых множеств.

а) Объединение любого числа открытых множеств есть открытое множество.

б) Пересечение любого числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.

в) Пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество.

г) Объединение конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.

д) Пустое множество, а также все комплексная плоскость являются открытыми и замкнутыми множествами одновременно.

е) Для области $M \subseteq \mathbb{C}$ включение $\partial M \subseteq M$ имеет место тогда и только тогда, когда M – замкнутая область.

Подмножество $M \subseteq \mathbb{C}$ называется *ограниченным*, если найдется такая константа $R > 0$, что $|z| \leq R$ для любой точки $z \in M$. Это в точности означает, что область M помещается в замкнутый круг радиуса R с центром в нулевой точке. Внешность такого круга естественно считать окрестностью бесконечно удаленной точки ∞. Бесконечно удаленная точка – это новый элемент, стандартная окрестность которой задается неравенством $|z| > R$ и на которую распространяются операции сложения, умножения и деления следующим образом:

$$\frac{z}{\infty} = 0, \quad \infty + z = z + \infty = \infty \quad (z \in \mathbb{C}),$$
$$\frac{c}{0} = \infty, \quad \infty \cdot c = c \cdot \infty = \infty \quad (c \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

Поле комплексных чисел, пополненное элементом ∞, с определенными для него выше правилами, назовем *расширенной комплексной плоскостью.*

Для визуализации бесконечно удаленной точки поместим комплексную плоскость $\mathbb{C}$ в трехмерное пространство с третьей декартовой координатой ζ и рассмотрим в этом пространстве сферу единичного радиуса с центром в начале координат. Эта сфера $\mathfrak{R}$, называемая далее *сферой Римана*, задается уравнением $x^2 + y^2 + \zeta^2 = 1$. Точку $N(0, 0, 1)$ назовем северным полюсом, а точку $S(0, 0, -1)$ назовем южным полюсом. Построим *стереографическую проекцию сферы Римана на комплексную плоскость*, т. е. отображение $\check{s} : \mathfrak{R} \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ такое, что для любой точки $P \in \mathfrak{R}$, не совпадающей с северным полюсом, точки N, P и $\check{s}(P) \in \mathbb{C}$ лежат на одной прямой (см. рис. 4).

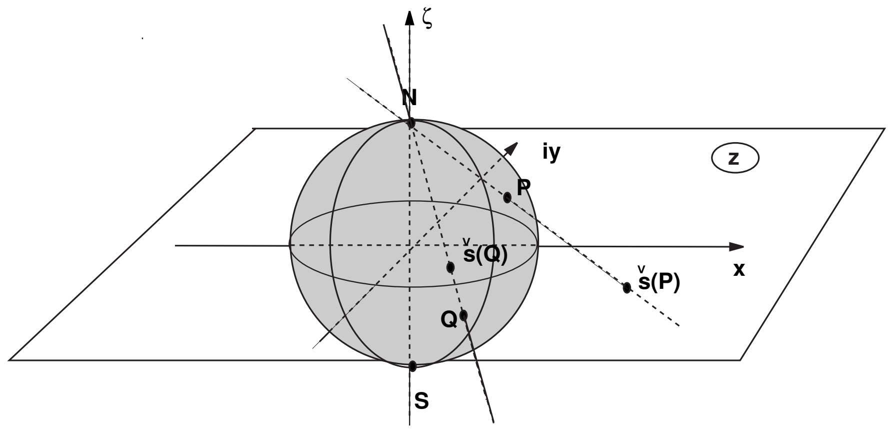

Рис. 4: Сфера Римана

Получаем биективное соответствие между точками сферы Римана с выброшенным северным полюсом и точками комплексной плоскости. Тогда северный полюс N соответствует бесконечно удаленной точке ∞ в топологическом смысле: если последовательность точек P_n на сфере Римана стремится к N, то $s(P_n) \to \infty$ и наоборот, если последовательность комплексных чисел z_n стремится к ∞, то $\check{s}^{-1}(z_n)$ приближается к северному полюсу по сфере Римана.

ЗАДАЧИ

1. Доказать свойства открытых и замкнутых множеств.
2. Задать стереографическую проекцию формулами:
$$P(x, y, \zeta) \in \mathfrak{R} \setminus \{N\} \to \check{s}(P) = \frac{x + iy}{1 - \zeta}$$
$$z = x + iy \to \check{s}^{-1}(z) = P\left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{-1 + x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}\right)$$
3. Описать множество неподвижных точек при стереографической проекции.
4. Описать образ $\check{s}(\gamma)$ окружности γ на сфере Римана, получаемой при пересечении сферы с плоскостью, проходящей через ось $O\zeta$.
5. Описать праобразы прямых $x = Const$ и $y = Const$ относительно стереографической проекции.
6. Какие преобразования комплексной плоскости соответствуют следующим движениям сферы Римана а) вращение вокруг оси $O\zeta$, б) отражение относительно плоскости $Ox\zeta$, в) отражение относительно плоскости Oxy?

4 Функции комплексного переменного.

Пусть D – некоторое множество комплексных чисел. Говорят, что на этом множестве задана функция комплексного переменного $w = f(z)$, если каждой точке $z \in D$ поставлено в соответствие одно (в случае однозначной функции) или большее число (в случае многозначной функции) значений $w \in \mathbb{C}$. Это соответствие задается правилом, выраженным либо в виде формулы, например, $w = 2x + y + iy^2$, либо словесно, например, $\sqrt[n]{z}_{\mathbb{C}}$ – все комплексные корни n-ой степени из числа z. Функцию комплексного переменного можно записать в виде

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

где $z = x + iy$, а $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – функции действительных переменных x, y. Тогда $u(x, y)$ называют *действительной частью функции* f, а $v(x, y)$ – *мнимой частью* этой функции.

Пример 4.1. Для функции $f(z) = z^2$ действительная часть равна $x^2 - y^2$, а мнимая – $2xy$. Это можно записать так: $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$ и $\mathrm{Im}(z^2) = 2xy$.

Определение 4.2. Пусть функция $f(z)$ определена в окрестности точки z_0, кроме быть может самой точки z_0. *Предел функции* $f(z)$ *при* $z \to z_0$ *равен* $A \in \mathbb{C}$, если для любого действительно числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех точек z из *проколотой окрестности*, т.е. для точек с условием $0 < |z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$.

Предположим теперь, что функция $f(z)$ определена в любой точке внешности круга достаточно большого радиуса. *Предел функции* $f(z)$ *при* $z \to \infty$ *равен* $A \in \mathbb{C}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $R = R(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех комплексных чисел z с условием $|z| > R$ выполняется неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$.

Функция $\alpha(z)$ называется *бесконечно малой при* $z \to z_0$, если $\lim\limits_{z \to z_0} \alpha(z) = 0$. Эта же функция называется *бесконечно малой высшего порядка относительно функции* $\beta(z)$ *в точке* z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{\alpha(z)}{\beta(z)} = 0$. Записываем этот факт таким образом: $\alpha(z) = o(\beta(z))$. Имеют место обычные свойства предела и бесконечно малых величин – предел суммы, произведения частного. Сумма бесконечно малых (высшего порядка) есть бесконечно малая (высшего порядка). Произведение бесконечно малой (высшего порядка) на ограниченную функцию есть бесконечно малая (высшего порядка).

Предложение 4.3. *Пусть* $z_0 = x_0 + iy_0$*, и функция* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *определена в проколотой окрестности точки* z_0*. Тогда комплексное число* $a + ib$ *равно пределу функции* $f(z)$ *при* $z \to z_0$ *в том и только том случае, когда*

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x \to x_0; y \to y_0} u(x, y), \\ b = \lim\limits_{x \to x_0; y \to y_0} v(x, y) \end{cases}.$$

Также как и для действительной переменной, функция комплексной переменной $f(z)$ *непрерывна в точке* z_0, если она определена в окрестности этой точки и $f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$. *Непрерывность на множестве* означает непрерывность в каждой точке этого множества. Из предложения 4.3 вытекают обычные свойства непрерывных функций – непрерывность суммы, произведения, частного и непрерывность композиции двух непрерывных функций. Кроме этого топологическими средствами доказывается теорема Вейерштрасса: непрерывная функция на ограниченном замкнутом множестве ограничена и достигает своего наибольшего по модулю значения.

ЗАДАЧИ

1. Доказать непрерывность функций а) $\operatorname{Re} z$, б) $\operatorname{Im} z$, в) $|z|$.
2. Найти действительную и мнимую части функций а) $w = z^3$, б) $w = 1/z$, в) $w = \frac{\overline{z}}{1+z}$.
3. Найти предел: а) $\lim\limits_{z \to \infty} \frac{2z+3}{z^2+4}$, б) $\lim\limits_{z \to i} \frac{z^4+4z^2+3}{z^2+1}$.
4. Существует ли предел $\lim\limits_{z \to \infty} \frac{z}{\overline{z}}$?
5. Найти область существования и область непрерывности функции $\ln(x - y) + i\sqrt{1 - y}$.
6. Найти значение функции $\ln(x - y) + i\sqrt{3 - y}$ в точке $3 + 2i$.

5 Дробно-линейная функция

Определение 5.1. Функция вида $w = \frac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ и $ad - bc \neq 0$, называется *дробно-линейной*. В частности дробно-линейной функцией будет всякая *линейная функция* $w = az + b$ $(a \neq 0)$.

Дробно-линейная функция неопределена в точке $-d/c$, но нетрудно вычислить, что предел функции $\frac{az+b}{cz+d}$ при $z \to -d/c$ равен ∞. Полагаем по определению $w(-d/c) = \infty$ и, кроме того, $w(\infty) = a/c$. Тогда дробно-линейная функция задает биективное преобразование расширенной комплексной плоскости.

Предложение 5.2. *Обратная к дробно-линейной функции также будет дробно-линейной. Композиция дробно-линейных функций снова будет дробно линейной функцией. Дробно-линейные функции образуют группу относительно композиции.*

Доказательство. Результат подстановки дробно-линейной функции $\zeta = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ в дробно-линенйную функцию $w = \frac{a_2\zeta+b_2}{c_2\zeta+d_2}$ будет следующим:

$$w = \frac{a_2\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1} + b_2}{c_2\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1} + d_2} = \frac{(a_2a_1 + c_1b_2)z + (a_2b_1 + d_1b_2)}{(c_2a_1 + c_1d_2)z + (c_2b_1 + d_1d_2)} \tag{3}$$

При этом

$$\begin{aligned}(a_2a_1 + c_1b_2)(c_2b_1 + d_1d_2) - (a_2b_1 + d_1b_2)(c_2a_1 + c_1d_2) =\\ = (a_1d_1 - c_1b_1)(a_2d_2 - c_2b_2) \neq 0\end{aligned}$$

Следовательно, функция (3) является дробно-линейной. Обратная функция к дробно-линейной функции $w = \frac{az+b}{cz+d}$ получается, если разрешить это соотношение относительно z. При этом получим $z = \frac{dw-b}{-cw+a}$. Заметим, что $da - (-b)(-c) = ad - bc \neq 0$. Роль единичного элемента в группе дробно-линейных функций играет тождественная функция $w = z$ для которой $a = d = 1$, $b = c = 0$. □

Замечание 5.3. Преобразование (3) показывает, что отображение

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \to \quad w = \frac{az+b}{cz+d}$$

задает гомоморфизм группы $GL(2,\mathbb{C})$ невырожденных 2×2-матриц на группу дробно-линейных преобразований. Ядром этого гомоморфизма является подгруппа всех скалярных матриц.

Для изучения свойств дробно-линейных преобразований понадобится понятие инверсии относительно окружности γ радиуса R с центром в точке O. Точки P и P' называются *инверсными относительно* γ, если они лежат на одном луче, выходящем из точки O и произведение расстояний от них до точки O равно R^2:

$$OP\cdot OP' = R^2$$

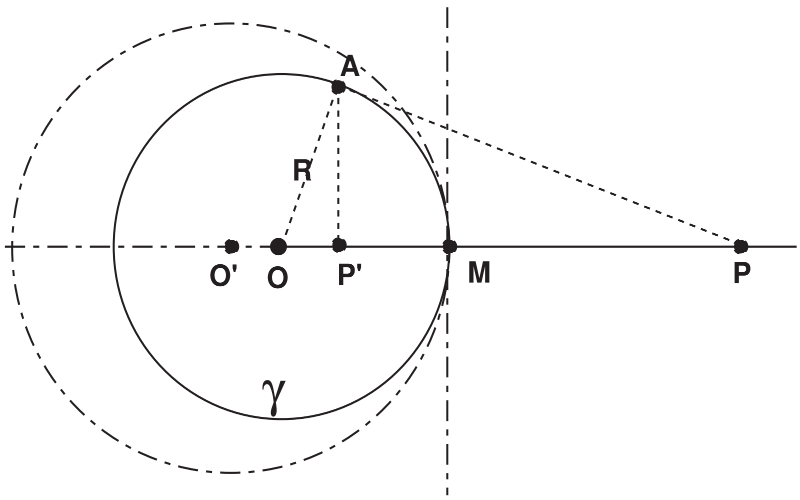

Рис. 5: Инверсия относительно окружности.

Преобразование евклидовой плоскости, переводящее всякую точку P, не совпадающую с O в инверсную точку P' называется *инверсией*. При инверсии точки окружности γ остаются неподвижными, внутренность круга $OP' < R$ переходит в внешность этого круга и наоборот. Из определения инверсии вытекает геометрический способ построения инверсной точки P' по заданной точке P (см. рис. 5). Рассмотрим лишь случай, когда P лежит вне круга. Проводим касательную к окружности γ из точки P. Пусть A – точка касания. Опускаем перпендикуляр из точки A на луч

OP. Инверсная точка P' будет основанием этого перпендикуляра. Это следует из подобия треугольников OAP' и OAP:

$$\frac{OA}{OP} = \frac{OP'}{OA} \Rightarrow R^2 = OA^2 = OP \cdot OP'.$$

При инверсии центр круга, точка O, переходит в бесконечно удаленную точку. Наоборот, если $P \to \infty$, то $P' \to O$. Если евклидову плоскость превратить в плоскость комплексного переменного z так, что точка O изображает нулевое комплексное число, то инверсия будет задаваться формулой

$$z \to \frac{R^2}{\overline{z}} = \frac{R^2}{|z|^2} z.$$

Действительно, числа z и $\frac{R^2}{|z|^2} z$ отличаются положительным множителем. Это показывает, что точки z и $R^2/\overline{z}$ лежат на одном луче. Далее, $|z| = |\overline{z}|$, и поэтому

$$|z| \cdot \left| \frac{R^2}{\overline{z}} \right| = |z| \cdot \frac{R^2}{|\overline{z}|} = R^2.$$

Заметим, что если на рис. 5 фиксировать точки P и M, а точку O устремить в бесконечность влево по горизонтальной прямой, то окружность γ будет приближаться к перпендикуляру в точке M, а точка P' будет стремиться к точке, симметричной P относительно этого перпендикуляра. Иными словами, симметрия относительно прямой есть предельный случай инверсии относительно окружности "бесконечно большого радиуса".

Для выяснения геометрического смысла дробно-линейного преобразования сначала рассмотрим случай $w = az$, где a – комплексное число с единичным модулем. При таком преобразовании расстояние $d(z_1, z_2)$ между точками z_1, z_2 комплексной плоскости сохраняется. Действительно, $d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$ и

$$d(az_1, az_2) = |az_2 - az_1| = |a|\,|z_2 - z_1| = |z_2 - z_1| = d(z_1, z_2).$$

Линейное отображение $w = z + b$ также обладает этим свойством, но в отличии от умножения на a оно не имеет неподвижной точки (нулевая точка будет неподвижной для умножения). Воспользуемся следующим геометрическим фактом: *любое преобразование евклидовой плоскости, сохраняющее расстояния, есть либо параллельный перенос (случай отсутствия неподвижных точек), либо поворот (случай наличия неподвижной точки), либо симметрией относительно некоторой прямой.* Поворот среди этих движений характеризуется тем, что у него ровно одна неподвижная точка. Итак, доказано, что *умножение на комплексное число с единичным модулем есть поворот комплексной плоскости вокруг точки 0.*

Предложение 5.4. *Всякую дробно-линейную функцию можно получить композицией следующих преобразований:*

- *(параллельный перенос)* $z \to z + z_0$;
- *(поворот)* $z \to a \cdot z$, *где* $|a| = 1$;
- *(гомотетия с коэффициентом* $r > 0$*)* $z \to r \cdot z$;
- *(инверсия+сопряжение)* $z \to \frac{1}{\bar{z}} \to \frac{1}{z}$.

Доказательство. Сначала заметим, что

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a/c(cz+d) - ad/c + b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \cdot \frac{1}{z+d/c}$$

в том случае когда $c \neq 0$, т. е. в том случае когда дробно-линейное преобразование не является линейным. Согласно определению дробно-линейного преобразования число $\frac{ad-bc}{c^2}$ не нулевое. Любое ненулевое комплексное число можно представить виде произведения $r \cdot a$, где $|a| = 1$ и $r \in \mathbb{R}^{>0}$. Отсюда следует результат. □

Под *окружностью в расширенном смысле* будем понимать либо окружность в привычном смысле, либо прямую, как окружность бесконечного радиуса. Уравнение такой окружности будет

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \tag{4}$$

где $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ и первые три коэффициента не равны одновременно нулю. Случай $A = 0$ соответствует прямой. Заметим, что это уравнение можно переписать в виде

$$Az\overline{z} + \overline{M}z + M\overline{z} + D = 0, \tag{5}$$

где $A, D \in \mathbb{R}$ и $M = B/2 + C/(2i) \in \mathbb{C}$.

Теорема 5.5 (круговое свойство). *Всякая дробно линейная функция переводит окружность в расширенном смысле в окружность в расширенном смысле.*

Доказательство. В виду предложения 5.4 и того элементарного факта, что параллельный перенос, поворот, гомотетия и симметрия переводят окружность в окружность, а прямую в прямую, доказательство достаточно провести для инверсии $w = \frac{1}{\overline{z}}$. Пусть (5) – уравнение окружности в расширенном смысле. Тогда $z = \frac{1}{\overline{w}}$ и уравнение (5) переписывается так:

$$\frac{A}{w\overline{w}} + \frac{\overline{M}}{\overline{w}} + \frac{M}{w} + D = 0$$

или

$$A + \overline{M}w + M\overline{w} + Dw\overline{w} = 0$$

Это уравнение также задает окружность в расширенном смысле на плоскости w (при $D = 0$ получаем прямую). □

Пример 5.6. Найдем образы действительной оси, мнимой оси и единичной окружности относительно дробно линейной функции $w = \frac{z-i}{z+i}$. Вычислив значения

$$w(0) = -1, \quad w(1) = -i, \quad w(-1) = i, \quad w(i) = 0, \quad w(-i) = \infty$$

и воспользовавшись круговым свойством, находим, что $w(\mathbb{R}) = \mathbb{S}$, $w(i\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $w(\mathbb{S}) = i\mathbb{R}$.

Пример 5.7. Докажем, что при любом $a \in \mathbb{S}$ и любом комплексном α, не принадлежащем единичной окружности, дробно-линейная функция следующего вида:

$$w = a\frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha}z} \tag{6}$$

отображает единичную окружность на себя. Во-первых, определитель $\begin{vmatrix} 1 & -\alpha \\ -\overline{\alpha} & 1 \end{vmatrix}$ не равен 0, в силу того, что $\alpha \notin \mathbb{S}$. Далее:

$$|w(1)| = \frac{|1-\alpha|}{|1-\overline{\alpha}|} = \frac{|1-\alpha|}{|\overline{1-\alpha}|} = 1, \quad |w(-1)| = \frac{|-1-\alpha|}{|1+\overline{\alpha}|} = \frac{|1+\alpha|}{|\overline{1+\alpha}|} = 1,$$

$$|w(i)| = \frac{|i-\alpha|}{|1-i\overline{\alpha}|} = \frac{|i-\alpha|}{|(-i-\overline{\alpha})i|} = \frac{|i-\alpha|}{|\overline{i-\alpha}|} = 1.$$

Итак: $w(1)$, $w(-1)$, $w(i)$ – три различные точки, лежащие на единичной окружности. Следовательно, $w(\mathbb{S}) = \mathbb{S}$ в силу кругового свойства. Так как $w(0) = a \cdot \alpha$ и $|w(0)| = |\alpha|$, то при $|\alpha| > 1$ единичный круг отображается на внешность единичного круга, а при $|\alpha| < 1$ дробно-линейное преобразование (6) отображает единичный круг на себя.

ЗАДАЧИ

1. Интерпретировать преобразование инверсии $z \to \frac{1}{z}$ на сфере Римана как отражение относительно горизонтальной плоскости.

2. Доказать, что стереографическая проекция также обладает круговым свойством. Используя это, дать второе доказательство теоремы о круговом свойстве дробно-линейных функций.

3. Найти образ единичной окружности относительно функции а) $w = \frac{z+i}{z-i}$, б) $w = \frac{z}{z+1}$.

4. Нарисовать множество точек на комплексной плоскости, удовлетворяющих уравнению $z\overline{z} + \overline{z} + z = 0$.

5. * Доказать, что любая дробно-рациональная функция с условием $w(\mathbb{S}) = \mathbb{S}$ имеет вид (6).

6. * Найти все дробно-линейные функции, отображающие верхнюю полуплоскость $\operatorname{Re} z \geq 0$ на внутренность единичного круга.

6 Аналитичность

Определение 6.1. Пусть функция $f(z)$ определена в окрестности точки z_0. *Производная функции комплексного переменного* $w = f(z)$ *в точке* z_0 определяется в точности также как и для функции действительного переменного:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Функция комплексного переменного называется *аналитической на открытой области* G, если она имеет производную в каждой точке этой области и производная непрерывна. *Аналитичность в точке* означает существование и непрерывность производной в некоторой окрестности этой точки. *Аналитичность на замкнутой области* D означает существование и непрерывность производной на некоторой открытой области G, содержащей D.

Имеют место обычные правила дифференцирования: производная суммы, произведения, частного и производная сложной функции. Производная постоянной функции равна 0. Если $w = f(z)$ и $z = g(w)$ – две взаимно-обратные функции, то $g'(w) = \frac{1}{f'(z)}$.

Многочлен $w = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$ является аналитической функцией на всей комплексной плоскости. Дробно-линейная функция $w = \frac{az+b}{cz+d}$ аналитична всюду, кроме точки $-d/c$ (при $c \neq 0$), при этом ее производная $w' = \frac{ad-dc}{(cz+d)^2}$ нигде не обращается в ноль.

Пример 6.2. Функция $w = \overline{z}$ не аналитична ни в одной точке, так как

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta z = \Delta x + i0, \\ -1, & \text{если } \Delta z = 0 + i\Delta y. \end{cases}$$

Так же как в курсе анализа действительной переменной доказывается, что из существования производной и тем более из аналитичности функции следует ее непрерывность. Обратное к этому утверждению неверно, как показывает пример 6.2.

Требование аналитичность функции комплексной переменной оказывается намного более жестким чем требование непрерывной дифференцируемости функции действительной переменной. Частичное объяснение этого факта заключается в том, что предельный переход $\Delta z \to 0$ обладает гораздо большей свободой чем предельный переход $\Delta x \to 0$. В частности, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ стремится к нулю по комплексной плоскости, если $\Delta y = 0$, а Δx стремится к нулю по действительной прямой, либо если $\Delta x = 0$, а $\Delta y \to 0$. Этим мы воспользуемся для доказательства следующего критерия аналитичности.

Теорема 6.3 (условия Коши-Римана). *Функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в точке z_0 тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности этой точки существуют и непрерывны частные производные $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial y$ и выполнены условия Коши-Римана*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \tag{7}$$

Доказательство. Если $f(z)$ аналитична, то рассмотрев два случая $\Delta z = \Delta x$ и $\Delta z = i\Delta y$, получаем следующие значения производной: $f'(z) = \partial u/\partial x + i\partial v/\partial x$ и $f'(z) = -i\partial u/\partial y + \partial v/\partial y$. Отсюда следуют условия Коши-Римана. Наоборот, если условия Коши-Римана выполнены, то, учитывая дифференцируемость функций u и v, выводим:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + o(|z|)}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{o(|\Delta z|)}{\Delta z}.$$

Устремляя Δz к нулю, получаем, что предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$, т.е. производная w'_z существует и равна $u'_x + iv'_x$. В виду непрерывности частных производных u'_x и v'_x производная w'_z также непрерывна. $\square$

Пример 6.4. Определим при каких значениям параметра A функция $g(x+iy) = x^2 + y^2 - Axyi$ является аналитичной. Из условий Коши-Римана находим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} = Ax \Rightarrow A = 2.$$

Тогда $g(z) = z^2$ – аналитическая функция.

Для функций $w = \operatorname{Re} z$, $w = \overline{z}$, $w = \operatorname{Im} z$ условия Коши-Римана не выполнены ни в одной точке. Действительно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(-y)}{\partial y} = -1.$$

Отсюда вытекает, что функция $\operatorname{Re} z$ не аналитична ни в одной точке, хотя частные производные от u и v существуют любого порядка.

ЗАДАЧИ

1. Проверить аналитичность функций а) $x^3 - 3y^2x + i(3x^2y - y^3)$, б) $\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}$, в) $e^x \cos y + ie^x \sin y$

2. При каких условиях на константы a и b функция $ax^2 + by^2 + 2xyi$ аналитична?

7 Гармонические функции

Дифференциальный оператор $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ называется *оператором Лапласа*, а решения *дифференциального уравнения Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

называют *гармоническими функциями.*

Сформулируем две физические задачи, для которых математической моделью является уравнение Лапласа.

1. Пусть D – физическая однородная пластинка, одинаковой толщины, теплоизолированная снизу и сверху. Обозначим через $u(x, y)$ температуру в точке $(x, y) \in D$. Полагаем, что температура на границе ∂D

нам известна и поддерживается так, что она не зависит от времени. Тогда $u(x,y)$ – гармоническая функция, т. е. $u(x,y)$ – решение уравнения Лапласа с граничным условием, заданным распределением температуры на границе пластинки.

2. Пусть Γ – проволочный каркас, помещенный в пространство $Oxyu$ так, что кривая Γ есть график функции $u(x,y)$, $(x,y) \in L$, а L – замкнутая гладкая кривая в плоскости Oxy (как, например, окружность), ограничивающая область D. Натянем на проволочный каркас мыльную пленку, и пусть функция $u(x,y)$, $(x,y) \in D$ описывает вид этой мыльной пленки. Иными словами, мыльная пленка есть график функции $u(x,y)$ с областью определения D. Тогда $u(x,y)$ – гармоническая функция.

Предложение 7.1. *Если $f(z) = u + iv$ – аналитическая функция, то u и v – гармонические функции.*

Доказательство. Имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$$

Аналогично доказывается, что v гармоническая функция. □

Более точно, функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ называются *сопряженными гармоническими функциями.* Средствами теории поля, а именно используя понятие потенциала и применяя формулу для вычисления потенциала потенциального поля, для гармонической функции u можно найти сопряженную гармоническую функцию v и наоборот, для гармонической функции v можно найти сопряженную гармоническую функцию u. Покажем это на примере.

Пример 7.2. Функция $u = x^2 - y^2$, как легко видеть, гармоническая. Найдем функцию $v(x,y)$ такую, что $f(z) = u + iv$ станет аналитической функцией.

$$v(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_{(0,0)}^{(x,y)} 2y\,dx + 2x\,dy = 2xy.$$

Отсюда $u + iv = x^2 - y^2 + 2xyi$ – аналитическая функция на всей комплексной плоскости. Такой ответ можно было бы получить иначе, догадавшись, что $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$.

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что линейная функция $u(x, y) = a + bx + cy$ гармонична.
2. При каких значениях параметров функция $u = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ гармонична?
3. Проверить гармоничность функций а) $x^3 - 3xy^2$, б) $e^x \cos y$, в) $\cos x \operatorname{ch} y$, г) $\frac{x}{x^2+y^2}$.
4. Для гармонических функций предыдущей задачи найти их сопряженные.

8 Степенные ряды

Естественным обобщением многочленов являются функции, заданные в виде суммы ряда по степеням $z - z_0$:

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + c_3(z - z_0)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n. \quad (8)$$

Теорема 8.1 (Абеля). *Если ряд (8) сходится при некотором значении z^*, то он абсолютно сходится при любом $z \in \mathbb{C}$ таком, что $|z - z_0| < |z^* - z_0|$. Если же ряд (8) расходится при при некотором z^{**}, то он расходится и при любом комплексном z таком, что $|z - z_0| > |z^{**} - z_0|$. Существует неотрицательное действительное число R, называемое радиусом сходимости, такое, что ряд сходится абсолютно при $|z - z_0| < R$ и расходится при $|z - z_0| > R$.*

Круг $|z - z_0| < R$ называется *кругом сходимости*. Обозначим через $S(z)$ сумму ряда (8) в круге сходимости.

Теорема 8.2. *Функция $S(z)$ аналитична в круге сходимости и*

$$S(z)' = c_1 + 2c_2(z - z_0) + 3c_3(z - z_0)^2 + 4c_4(z - z_0)^3 + \dots \tag{9}$$

При этом ряд в правой части (9) имеет тот же радиус сходимости, что и ряд (8).

Доказательство. Пусть ряд $S(z)$ сходится в точке z^* и число z таково, что $|z - z_0| < |z^* - z_0|$. Из сходимости ряда $S(z)$ следует ограниченность последовательности $c_n(z^* - z_0)^n$, т. е. существование положительного числа M такого, что $|c_n(z^* - z_0)^n| \leq M$ для любого n. Обозначим через q величину $\left|\frac{z-z_0}{z^*-z_0}\right|$ и заметим, что она меньше 1. Оценим:

$$\left|nc_n(z - z_0)^{n-1}\right| = n\left|c_n(z^* - z_0)^n\right| \left|\frac{z - z_0}{z^* - z_0}\right|^{n-1} \frac{1}{|z^* - z_0|} \leq \frac{nq^{n-1}M}{|z^* - z_0|}.$$

Ряд $\sum_1^\infty nq^{n-1}$ сходится по признаку Даламбера. Следовательно, ряд $\sum_1^\infty \left|nc_n(z - z_0)^{n-1}\right|$ также сходится, т.е. сходится абсолютно ряд (9).

Наоборот, пусть ряд $S'(z)$ сходится в точке z^{**} и $|z - z_0| < |z^{**} - z_0|$. Тогда последовательность $nc_n(z^{**} - z_0)^{n-1}$ ограничена, т.е. найдется положительное действительное число L такое, что $\left|nc_n(z^{**} - z_0)^{n-1}\right| \leq L$. Обозначим $\tilde{q} = \left|\frac{z-z_0}{z^{**}-z_0}\right| < 1$ и оценим:

$$|c_n(z - z_0)^n| \leq \left|nc_n(z^{**} - z_0)^{n-1}\right| \left|\frac{z - z_0}{z^{**} - z_0}\right|^{n-1} |z - z_0| \leq L\tilde{q}^{n-1} |z - z_0|.$$

Так как $\sum_1^\infty \tilde{q}^{n-1}$ – сходящаяся прогрессия, то ряд $\sum_0^\infty c_n(z - z_0)^n$ сходится абсолютно.

Из доказанных выше утверждений вытекает, что ряды (8) и (9) имеют одинаковые радиусы сходимости.

Докажем, что сумма ряда (9) равна производной $S'(z)$. Достаточно это сделать для случая $z_0 = 0$. Фиксируем точку a внутри круга сходимости и выберем положительно действительное число $\Delta\rho$ настолько малым, чтобы $|a| + \Delta\rho$ было бы все еще меньше чем радиус сходимости. Пусть приращение Δz таково, что $|\Delta z| \leq \Delta\rho$. Имеем:

$$\frac{\Delta S}{\Delta z} = \frac{S(a + \Delta z) - S(a)}{\Delta z} = \sum_0^\infty c_n \frac{(a + \Delta z)^n - a^n}{\Delta z}.$$

Рассмотрим семейство непрерывных функций

$$f_n(\Delta z) = \begin{cases} c_n \frac{(a+\Delta z)^n - a^n}{\Delta z}, & \text{если } \Delta z \neq 0; \\ n c_n a^{n-1}, & \text{если } \Delta z = 0 \end{cases}.$$

Тогда $\frac{\Delta S}{\Delta z} = \sum_1^\infty f_n(\Delta z)$. При этом

$$|f_n(\Delta z)| = |c_n| \left| a^{n-1} + a^{n-2}(a+\Delta z) + \ldots + (a+\Delta z)^{n-1} \right| \leq$$

$$\leq |c_n| \, n(|a| + \Delta\rho)^{n-1}.$$

Построена мажоранта для функционального ряда $\sum_1^\infty f_n(\Delta z)$, тем самым данный ряд сходится равномерно в круге $|\Delta z| \leq \Delta\rho$. Применяя теорему о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда, получим:

$$S'(a) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta z} = \sum_1^\infty \lim_{\Delta z \to 0} f_n(\Delta z) = \sum_1^\infty f_n(0) = \sum_1^\infty n c_n a^{n-1}.$$

□

Пример 8.3. Ряд $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$ имеет единичный радиус сходимости и совпадает с функцией $\frac{1}{1-z}$ в круге сходимости.

Далее будут рассматриваться также и ряды вида

$$\frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-3}}{(z-z_0)^3} + \ldots \tag{10}$$

Такие ряды заменой $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$ сводятся к степенным рядам по степеням ζ. Из этого вытекает:

Теорема 8.4. *Существует неотрицательное действительное число r или $+\infty$ такое, что ряд (10) сходится абсолютно в области $|z - z_0| > r$, и его сумма – аналитическая в этой области функция. При этом в любой точке круга $|z - z_0| < r$ ряд (10) расходится.*

Пример 8.5. Ряд $-\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \ldots.$ сходится в области $|z| > 1$, и его сумма совпадает в этой области с функцией $\frac{1}{1-z}$.

9 Комплексная экспонента

При изложении материала этого и следующего параграфов не используются определения и свойства действительных функций $e^x, \cos x, \sin x$ и числа π.

Экспонента $w = \exp z$ имеет фундаментальное значение для всей теории функций. С помощью экспоненты строятся все остальные элементарные функции, в том числе и тригонометрические $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ и обратные тригонометрические $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$. С алгебраической точки зрения значение комплексной экспоненты состоит в том, что она задает эпиморфизм аддитивной группы $(\mathbb{C}, +)$ на мультипликативную группу $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Определение *комплексной экспоненты* следующее:

$$\exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{11}$$

Вычислим радиус сходимости этого ряда:

$$R = \lim \frac{1/n!}{1/(n+1)!} = \lim(n+1) = +\infty.$$

Итак: *комплексная экспонента определена и аналитична на всей комплексной плоскости и*

$$(\exp z)' = \exp z; \qquad exp\ 0 = 1. \tag{12}$$

Первое равенство здесь следует из теоремы о почленном дифференцировании степенного ряда. Заметим, что существует только один степенной ряд, а именно ряд $\sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}$, сумма которого удовлетворяет условиям (12).

Теорема 9.1 (основное функциональное соотношение). *Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 имеет место равенство:*

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2). \tag{13}$$

Доказательство. Применяем бином Ньютона:

$$\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \left(\sum_0^\infty \frac{z_1^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_0^\infty \frac{z_2^n}{n!} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k z_1^k z_2^{n-k} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = \exp(z_1 + z_2).$$

□

Следствие. *Имеют место равенства для любых комплексных чисел* z_1, z_2 *и* z *и целого числа* m

$$\exp(z_1 - z_2) = \frac{\exp(z_1)}{\exp(z_2)}, \quad \exp(-z) = \frac{1}{\exp z}, \quad \exp mz = (\exp z)^m. \quad (14)$$

Доказательство этих тождеств вытекает из основного функционального тождества несложными алгебраическими преобразованиями. В частности, значение комплексной экспоненты не может быть равным нулю, ибо, если $\exp z = 0$, то $1 = \exp 0 = \exp(z - z) = \exp z \cdot \exp(-z) = 0$ – противоречие. Этот факт вместе с соотношением (13) и означает, что отображение $exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ есть гомоморфизм групп. Позже будет доказано, что это отображение сюрьективно.

Заметим, что основание натуральных логарифмов, т. е. число e является значением экспоненты в точке 1: $e = \exp 1$. Отметим другие свойства экспоненты.

Для любого натурального числа n из основного функционального тождества получим равенства

$$\exp(n) = \exp(\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{\text{n раз}}) = (\exp 1)^n = e^n,$$

и $\exp(-n) = \frac{1}{e^n}$. Далее, так как

$$e = \exp 1 = \exp\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = \left(\exp \frac{1}{n}\right)^n,$$

то $\exp(1/n) = \sqrt[n]{e}$. Переходя к произвольному действительному числу, получим следующее свойство

Свойство 9.2. *Если $x \in \mathbb{R}$, то $\exp x$ – положительное действительное число и*

$$\exp x = \sup\left\{\sqrt[n]{e^m} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}; \frac{m}{n} < x\right\} \in \mathbb{R} = \lim_{t \to x, t \in \mathbb{Q}} \exp t.$$

Доказательство. Первое утверждение ясно для $x \geq 0$. Если $x = -k < 0$, то $k > 0$ и $\exp x = \frac{1}{\exp k} > 0$. Так как $(\exp x)' = \exp x > 0$, то действительная экспонента – строго возрастающая непрерывная функция. В силу монотонности, предел $\lim\limits_{t \to x, t \in \mathbb{Q}} \exp t$ существует, и так как для $t = \frac{m}{n}$ имеет место равенство $\exp t = \sqrt[n]{e^m}$, то этот предел совпадает с точной верхней гранью множества $\left\{\sqrt[n]{e^m} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}; \frac{m}{n} < x\right\}$. □

В связи с этим свойством часто будем писать e^z вместо $\exp z$.

10 Тригонометрические и гиперболические функции

Определение 10.1. *Синусом комплексного переменного* называется функция

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Косинус комплексного переменного есть функция

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m} \frac{z^{2m}}{(2m)!}.$$

Гиперболический синус комплексного переменного определяется так:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Гиперболический косинус комплексного переменного – это функция

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{(2m)!}.$$

Отметим некоторые свойства вновь введеных функций.

Свойство 10.2. *Если* $x \in \mathbb{R}$, *то* $\cos x, \sin x, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x \in \mathbb{R}$.

Свойство 10.3. *Имеет место следующая связь тригонометрических и гиперболических функций*

$$\cos iz = \operatorname{ch} z; \quad \sin iz = i \operatorname{sh} z, \quad \operatorname{ch} iz = \cos z; \quad \operatorname{sh} iz = i \sin z.$$

Тождества в следующих двух свойствах доказываются простой алгебраической проверкой.

Свойство 10.4 (основные тригонометрическое и гиперболическое тождества).

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1; \qquad \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

Свойство 10.5 (формулы сложения).

$$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2; \ \sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2;$$

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2; \ \operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2.$$

В частности,

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z = 2\cos^2 z - 1; \ \sin 2z = 2 \sin z \cos z;$$

$$\operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z = 2 \operatorname{ch}^2 z - 1; \quad \operatorname{sh} 2z = 2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z.$$

Для вычисления производных тригонометрических и гиперболических функций следует применить теорему о почленом дифференцировании степенного ряда (см. теорема 8.2). Получим:

$$(\cos z)' = -\sin z; \quad (\sin z)' = \cos z; \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z; \quad (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z. \quad (15)$$

Свойство 10.6 (четность). *Функции* $\cos z$, $\operatorname{ch} z$ *четны, а функции* $\sin z$, $\operatorname{sh} z$ *нечетны.*

Свойство 10.7. *Правило* $t \to e^{it}$ $(t \in \mathbb{R})$ *задает гомоморфизм группы* $(\mathbb{R}, +)$ *на единичную окружность* $\mathbb{S}$ *(группа по умножению). Существует наименьшее действительное положительное* ЧИСЛО ПИ $\pi \approx$

3.14 *такое, что* $\cos\frac{\pi}{2} = 0$*. Тогда функции* $y = \sin t$ *и* $y = \cos t$ *биективно и непрерывно отображают отрезок* $[0, \pi/2]$ *на отрезок* $[0, 1]$*, а функция* e^{it} *задает биективное отображение полуинтервала* $[0, 2\pi)$ *на окружность* $\mathbb{S}$*. При этом* $e^{\pi i/2} = i$*,* $e^{\pi i} = -1$ *(*тождество Эйлера*),* $e^{3\pi i/2} = -i$*,* $e^{2\pi i} = 1$*.*

Доказательство. Из определения косинуса следует, что $\cos 0 = 1$, и поэтому в точке 0 функция $\cos t$ убывает. Далее $\cos 2 < 0$, что нетрудно оценить. Следовательно, число π с указанным свойством найдется, причем $\pi/2 < 2$. Так как $\cos t > 0$ для $t \in (0, \pi/2)$ и $(\sin t)' = \cos t$, то $\sin t$ строго возрастает на этом интервале. Тогда $\sin \pi/2 = 1$, т. е. $e^{i\pi/2} = i$. Кроме того, из соотношения $(\cos t)' = -\sin t$ следует строгое убывание функции $\cos t$ на отрезке $[0, \pi/2]$ от 1 до 0. Далее, $e^{i\pi} = i^2 = -1$, поэтому $e^{3\pi i/2} = -1 \cdot i = -i$ и $e^{2\pi i} = (-1)^2 = 1$. Из этих рассуждений следует, что π – наименьшее положительное число, такое, что $e^{2\pi i} = 1$. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что отображение $exp : [0, 2\pi) \to \mathbb{S}$ – биекция. $\square$

Как простое следствие этого свойства, получаем

Свойство 10.8 (периодичность). *Функция* e^z *периодична с периодом* $2\pi i$*. Функции* $\cos z$*,* $\sin z$ *периодичны с периодом* 2π*, а функции* $\operatorname{ch} z$*,* $\operatorname{sh} z$ *периодичны с периодом* $2\pi i$*. Более того,*

$$e^{iz_1} = e^{iz_2} \quad \Leftrightarrow \quad z_1 - z_2 = 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \tag{16}$$

Применяя формулы суммы, получаем

Свойство 10.9 (разложение на действительную и мнимую части).

$$e^{x+iy} = (e^x \cos y) + i(e^x \sin y),$$

$$\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y, \quad \sin(x+iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x+iy) = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y, \quad \operatorname{sh}(x+iy) = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y.$$

Если однозначная аналитическая функция $f(z)$ отображает биективно область D на область G, то D называется *областью однолистности.*

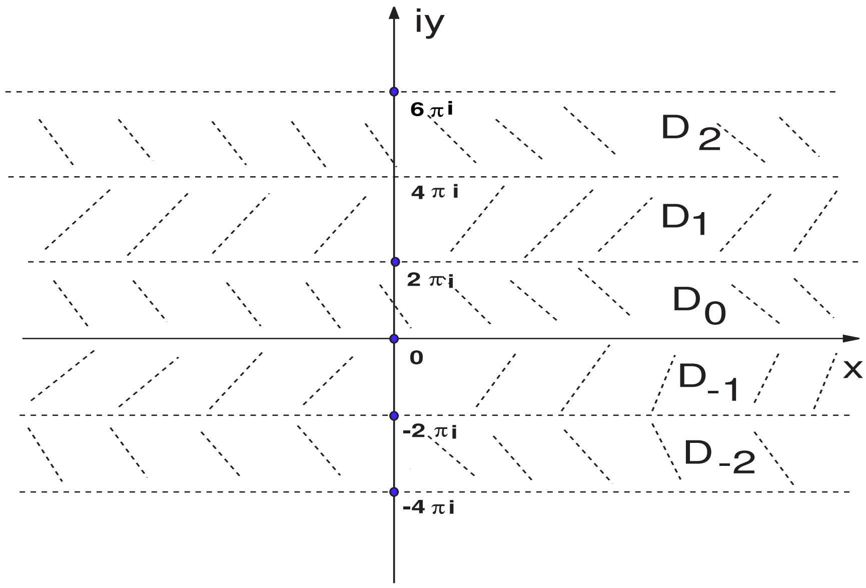

Рис. 6: Области однолистности для экспоненты.

Свойство 10.10. *Область* $D_k = \{x + iy \,|\, 2\pi k \le y < 2\pi(k+1)\}$ *для любого целого* k *является областью однолистности функции* e^z*, которая отображает ее на область* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Доказательство. Из соотношения (16) следует инъективность отображения $\exp : D_k \to \mathbb{C}$. Пусть w – любое ненулевое комплексное число. Тогда решая уравнения $e^x = |w|$ и $e^{iy} = w/|w|$ с действительными переменными x и y (y выбираем из полуинтеравала $[2\pi k, 2\pi(k+1))$), получим $z = x + iy \in D_k$ такое, что $\exp z = w$. Сюръективность доказана. □

Следствием предыдущего свойства является

Свойство 10.11 (область значений). *Область значений функций* $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ *есть все поле комплексных чисел.*

Свойство 10.12 (нули). *Решением уравнения* $\sin z = 0$ *является множество* $\{\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$. *Нули функции* $\cos z$ *– множество* $\{\pi/2 + \pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$. *Нулями функции* $\operatorname{sh} z$ *является множество* $\{\pi k i \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$, *а нули функции* $\operatorname{ch} z$ *– множество* $\{\pi/2i + \pi k i \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$.

Доказательство. Имеют место соотношения

$$\sin z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{iz} - e^{-iz} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2iz} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2iz = 2\pi i k \quad \Leftrightarrow \quad z = 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Аналогично доказываются утверждения для остальных функций $\square$

Определение 10.13. Функция $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ называется *тангенсом*, а функция $\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$ называется *гиперболическим тангенсом.*

Производные тангенсов вычисляются с использованием известного правила "производная отношения":

$$(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}, \quad (\operatorname{th} z)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z}.$$

Область допустимых значений тангенса $\operatorname{tg} z$ есть многосвязная область

$$\mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + \pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

ЗАДАЧИ

1. Вычислить а) $e^{-1+\pi i/4}$, б) $\sin(2i + \pi/2)$, в) $\operatorname{th} \pi i/6$.
2. Назовем число T для функции $f(z)$ *полупериодом*, если найдется константа λ такая, что $f(z+T) \equiv \lambda f(z)$ для всех $z \in$ ОДЗ(f). Найти все полупериоды функций $e^z, \cos z, \sin z, \operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$.
3. * Доказать, что $\exp z = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.

11 Аргумент комплексного числа

Как одно из приложений комплексной экспоненты получаем строгое определение аргумента.

Определение 11.1. *Главным значением аргумента ненулевого комплексного числа* z назовем то единственное действительное число $\varphi \in [0, 2\pi)$ для которого $\frac{z}{|z|} = \exp(i\varphi)$. Обозначаем главное значение аргумента как $\arg z$.

Всевозможные решения уравнения $\exp(i\varphi) = \frac{z}{|z|}$ относительно переменной φ, т.е. множество $\{\arg z + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ назовем *аргументом комплексного числа* z и обозначим $\operatorname{Arg} z$.

Таким образом $\operatorname{Arg} z$ – многозначная функция. Пусть $r = |z|$ и $\varphi \in \operatorname{Arg} z$. Тогда

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

называется соответственно показательной и тригонометрической формой записи (ненулевого) комплексного числа z.

Умножение и деление комплексных чисел в показательной форме будет выглядеть следующим образом:

$$r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}; \quad \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Итак: *при умножении двух комплексных чисел их модули перемножаются а аргументы складываются.*

Модуль и аргумент связаны с действительной и мнимой частями следующими соотношениями:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi = |z|\cos(\operatorname{Arg} z), \\ y = r\sin\varphi = |z|\sin(\operatorname{Arg} z). \end{cases} \tag{17}$$

Найдем аргументы и показательные формы записи некоторых комплексных чисел:

$$-5 = 5 \cdot e^{\pi i}; \quad i = 1 \cdot e^{\pi i/2}; \quad \operatorname{Arg}(i) = \{\pi/2 + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\};$$

$$\arg(2-2i) = \frac{7\pi}{8}; \quad \operatorname{Arg}(2-2i) = \left\{\frac{7\pi}{8} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}; 2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{\frac{7\pi i}{8}}$$

Отображение $z \to e^{i\varphi} \cdot z$ является поворотом комплексной плоскости на угол $\varphi \in \mathbb{R}$.

12 Извлечение корней

Другое приложение комплексной экспоненты – решение двучленного уравнения относительно неизвестной z:

$$z^n = w. \tag{18}$$

Здесь w – какое-либо заданное комплексное число, а n – натуральное число. Если $w = 0$, то $z = 0$. Иначе, запишем w в показательной форме: $w = re^{i\varphi}$, где $r = |w|$, а число φ – одно из значений аргумента коплексного числа w. Ясно, что $z \neq 0$ в этом случае. Пусть $z = \rho e^{i\psi}$ – показательная форма записи. Тогда

$$z^n = w \quad \Leftrightarrow \quad \rho^n e^{in\psi} = re^{i\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \rho^n = r, \\ n\psi = \varphi + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Следовательно, $\rho = \sqrt[n]{r}$ – арифметический корень n-ой степени из r, а $\psi = \frac{\varphi+2\pi k}{n}$. Все различные комплексные корни получим, если целое число k пробегает значения $0, 1, 2, ..., n-1$, т.е. все различные остатки от деления на натуральное число n. Действительно, если k сравнимо с m по модулю n, т.е. $k = m + n \cdot q$ для некоторого целого числа q, то

$$e^{\frac{i(\varphi+2\pi k)}{n}} = e^{\frac{i(\varphi+2\pi m)}{n} + 2\pi qi} = e^{\frac{i(\varphi+2\pi m)}{n}} \cdot e^{2\pi qi} = e^{\frac{i(\varphi+2\pi m)}{n}}$$

Тогда

$$\rho e^{\frac{i\varphi}{n}}, \rho e^{\frac{i(\varphi+2\pi)}{n}}, \dots, \rho e^{\frac{i(\varphi+2\pi(n-1))}{n}} \tag{19}$$

– все различные корни уравнения (18). Они расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса ρ с центром в начале координат.

Пример 12.1. Вычислим и изобразим на комплексной плоскости все корни из -8 (см. рис. 7):

$$\sqrt[3]{-8} = \left\{ 2\left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3} \right) \mid k = 0, 1, 2 \right\} = \left\{ -2, 1 \pm \sqrt{3}i \right\}$$

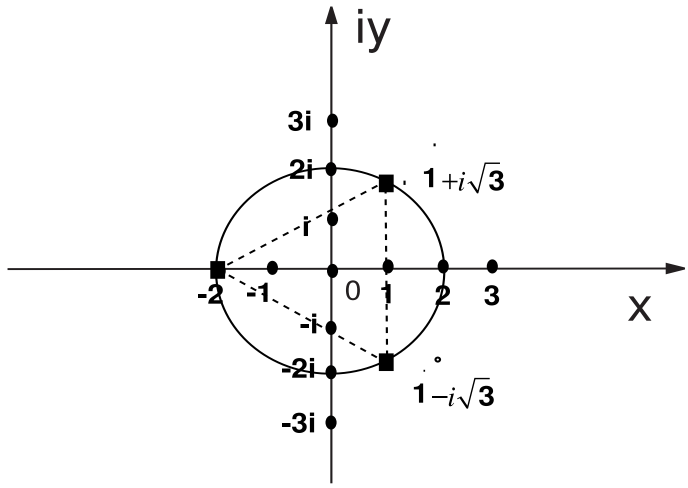

Рис. 7: Корни из -8

Определим многозначную функцию $\sqrt[n]{w}_{\mathbb{C}}$, ставящую в соответствие каждому комплексному числу w множество решений уравнения (18). Следует отличать эту многозначную функцию от арифметического корня n-ой степени $\sqrt[n]{r}$. Так, например, $\sqrt[4]{1} = 1$, но $\sqrt[4]{1}_{\mathbb{C}} = \{\pm 1, \pm i\}$.

Предложение 12.2. *Все комплексные корни n-ой степени из единицы образуют циклическую подгруппу группы $\mathbb{S}$.*

Доказательство. Перечислим элементы этой подгруппы – $\left\{ e^{\frac{2\pi k i}{n}} \mid 0 \le k \le n-1 \right\}$. Корень $e^{\frac{2\pi k i}{n}} = \cos\frac{2\pi k i}{n} + i \sin\frac{2\pi k i}{n}$ является образующим или *примитивным корнем* для этой группы. Отсюда следует, что произведение двух корней n-ой степени есть снова корень n-ой степени и обратный элемент к корню n-ой степени также будет корнем n-ой степени. □

Решения квадратного уравнения

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad (a, b, c \in \mathbb{C}; a \neq 0) \tag{20}$$

можно находить по известной школьной формуле

$$z_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}_{\mathbb{C}}}{2a}. \tag{21}$$

В отличие от "школьной теории" формула (21) применима в любом случае.

Пример 12.3. Решим уравнение $z^2 + 6z + 13 = 0$:

$$z_{1,2} = \frac{-6 + \sqrt{-16}_{\mathbb{C}}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2} = -3 \pm 2i$$

Заметим, что как и положено по теореме Виетта, сумма корней равна -6, а произведение равно 13.

ЗАДАЧИ

1. Найти действительную и мнимую часть комплексных чисел, заданных в показательной форме

$$a) \quad 2e^{-\pi i}, \quad b) \quad 5e^{\frac{\pi i}{4}}, \quad c) \quad e^{\frac{\pi i}{6}}$$

2. Найти $\sqrt[3]{i}_{\mathbb{C}}$, $\sqrt[8]{1}_{\mathbb{C}}$, $\sqrt[3]{-2+2i}_{\mathbb{C}}$, $\sqrt{3+4i}_{\mathbb{C}}$.

3. Решить уравнения над полем $\mathbb{C}$:

$$a) \quad z^2 + 4z + 29 = 0, \quad b) \quad z^4 + 3z^2 - 4 = 0, \quad c) \quad z^5 + z = 0$$

$$d) \quad z^3 + 1 = 0, \quad e) \quad z^2 + (3+2i)z + 1 + 3i = 0$$

4. Записать в показательной форме комплексные числа -7, $3i$, $1 - i$, $\sqrt{3} + i$

5. Нарисовать на комплексной плоскости линии, заданные равенством

$$a) \quad \frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{2}, \quad b) 2 \leq |z| \leq 3,\ 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$$

13 Многозначные функции

Ранее уже отмечалось, что *многозначной функцией комплексного переменного* называется правило, в силу которого каждому z из области определения D ставится в соответствии несколько (возможно бесконечное число) значений w. Иначе такая многозначная функция называется *многолистной*.

Примерами многозначных функций являются аргумент $\operatorname{Arg} z$ и корень n-ой степени $\sqrt[n]{z}_{\mathbb{C}}$. Для некоторых областей $D \subseteq \mathbb{C}$ можно выделить ветвь многозначной функции с соблюдением непрерывности или аналитичности, а для других нет. Так например, для области D на рисунке 8 выделим однозначную ветвь $\psi(z) = \arg z + 2\pi k_z$ функции $\operatorname{Arg} z$. Здесь k_z – целое число, которое указано на рисунке в той части области D, в которой лежит комплексное число z. Если z лежит на границе, то берется любое из двух возможных целых чисел. Построенная таким образом ветвь будет непрерывной функцией. Теперь можно построить и аналитическую ветвь многозначной функции $\sqrt[n]{z}_{\mathbb{C}}$ в той же области D – $\sqrt[n]{|z|} \exp \frac{\psi(z)}{n}$. Заметим, что для кольца $r < |z| < R$ такое построение, с соблюдением аналитичности, невозможно.

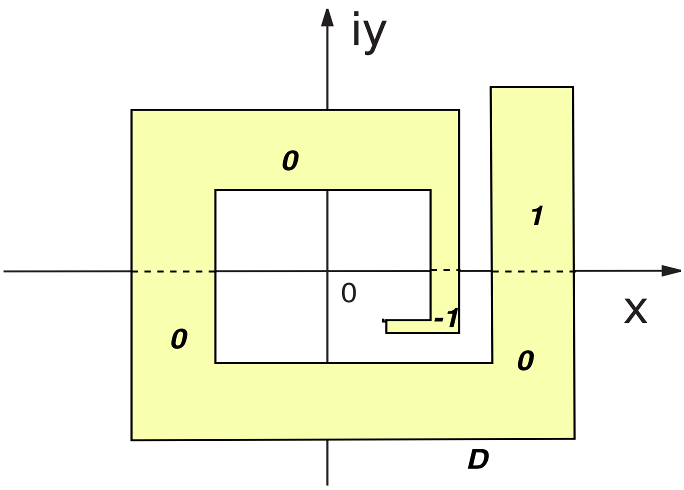

Рис. 8: Выделение ветви многозначной функции $\operatorname{Arg} z$

Основой всех трансцендентных функций является комплексная экспонента, подобно этому основой многозначных функций в теории функций комплексного переменного является *комплексный логарифм* – функция обратная к комплексной экспоненте:

$$\operatorname{Ln} z = \{ w \in \mathbb{C} \mid e^w = z \} . \tag{22}$$

Если $z = x$ – положительное действительное число, то в силу монотонности действительной функции e^y, существует только одно действительное число в множестве $\operatorname{Ln} x$. Оно называется *натуральным логарифмом числа* x и обозначается $\ln x$.

Свойства комплексного логарифма таковы

Свойство 13.1. *Область допустимых значений логарифма – все ненулевые комплексные числа. Если* $z = re^{i\varphi}$, *где* $r = |z|$ *и* $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, *то*

$$\operatorname{Ln} z = \{\ln r + i(\varphi + 2\pi k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Свойство 13.2 (производная логарифма).

$$(\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}.$$

Доказательство. Дифференцируем левую и правую часть соотношения $e^w = z$, считая w функцией от z. Получаем: $e^w \cdot w'_z = 1$, откуда $w'_z = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$. □

Следующее свойство вытекает из основного функционального соотношения для экспоненты.

Свойство 13.3.

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2; \qquad \operatorname{Ln} z^k = k \operatorname{Ln} z \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Пример 13.4. Вычислим: $\operatorname{Ln}(-1) = \{\pi i(1 + 2k)\}$, $\operatorname{Ln} i = \left\{\frac{\pi i}{2} + 2\pi k i\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

С помощью комплексного логарифма можно определить степень любого ненулевого комплексного числа с любым комплексным показателем:

$$z_1^{z_2} = \exp(z_2 \operatorname{Ln} z_1)$$

для любых $z_1 \in \mathbb{C}^*$, $z_2 \in \mathbb{C}$.

Пример 13.5. $i^i = \left\{e^{-\pi/2 - 2\pi k} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

В частности, $\sqrt[n]{z}_{\mathbb{C}} = z^{1/n}$; точнее имеет место следующее свойство

Свойство 13.6. *Для всех ненулевых комплексных чисел имеет место равенство:*

$$\sqrt[n]{z}_{\mathbb{C}} = z^{1/n} = \exp\left(\frac{\operatorname{Ln} z}{n}\right).$$

Определим теперь обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции:

$$\operatorname{Arcsin} z = \{w \in \mathbb{C} \mid \sin w = z\}; \qquad \operatorname{Arccos} z = \{w \in \mathbb{C} \mid \cos w = z\};$$
$$\operatorname{Arcsh} z = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{sh} w = z\}; \qquad \operatorname{Arcch} z = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{ch} w = z\};$$
$$\operatorname{Arctg} z = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{tg} w = z\}; \qquad \operatorname{Arcth} z = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{th} w = z\}.$$

Используя комплексный логарифм, установим формулы для вычислений этих многозначных функций. Начнем с решения уравнения $\operatorname{ch} w = z$ относительно w. Заменяя $\zeta = e^w$, сводим это уравнение к квадратному $\zeta^2 - 2z\zeta + 1 = 0$, решения которого суть: $\zeta = z + \sqrt{z^2-1}_{\mathbb{C}}$. Получаем окончательно:

$$\operatorname{Arcch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1}_{\mathbb{C}}).$$

Аналогично:

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1})_{\mathbb{C}};$$
$$\operatorname{Arcsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2+1}_{\mathbb{C}}); \quad \operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}_{\mathbb{C}});$$
$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z} \ \ (z \neq \pm 1); \quad \operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz} \ \ (z \neq \pm i).$$

Пример 13.7. Вычислим:
$\operatorname{Arcsin} 2 = \left\{\pi/2 + 2\pi k - i\ln(2 \pm \sqrt{3})\right\}$.
$\operatorname{Arctg} 2i = \{\pi/2 + i\ln 3/2 + \pi k\}$.

ЗАДАЧИ

1. Вычислить а) $\operatorname{Ln}(-5)$, б) $\operatorname{Arcsin}(-3)$, в) $(1+i)^i$.

2. Решить уравнение $\cos z = 2$.

3. Найти $\operatorname{Arcsin} i$.

14 Интегрирование функции комплексного переменного.

Кривые на комплексной плоскости

Определение 14.1. *Путем* или *кривой* L на комплексной плоскости называется отображение $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ отрезка действительной прямой $[\alpha, \beta]$ в комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Точка $z(\alpha)$ называется *началом пути* L, а точка $z(\beta)$ – *его конец*. Путь L называется *замкнутым*, если начало совпадает с концом. Образ отображения $z(t)$, т. е. множество $\{z(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ называется *носителем кривой* L.

Кривая L называется *непрерывной*, если функции $x(t)$ и $y(t)$, а тем самым и функция $z(t)$ непрерывны. Путь L называется *гладким*, если существует, непрерывна и отлична от нуля производная $z'(t) = x'(t)+y'(t)i$ в любой точке $t \in [\alpha, \beta]$; для замкнутого пути дополнительно требуется, что бы односторонние производные $z'(\alpha)$ и $z'(\beta)$ совпадали. Путь L называется *кусочно гладким*, если существует разбиение $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n = \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$ такое, что на каждом отрезке $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ путь L гладок.

Если $\psi : [\alpha', \beta'] \to [\alpha, \beta]$ – непрерывное и биективное отображение, то функция $z(\psi(s))$, где $s \in [\alpha', \beta']$ также задает путь L. Такая процедура называется заменой параметра. Заметим, что линейное отображение $\psi(s) = \frac{\beta}{\beta'-\alpha'}(s - \alpha') + \alpha$ биективно переводит отрезок $[\alpha', \beta']$ в отрезок $[\alpha, \beta]$. Можно определить операцию сложения над дугами кривых. Описательно, сумма L_1+L_2 означает, что сначала проходим путь L_1, а потом путь L_2. Для формального определения суммы $L_1 + L_2$ сначала параметризуем эти кривые так, что $L_1 : z = z_1(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ и $L_2 : z = z_2(t)$, $t \in [\beta, \gamma]$. Тогда, по определению, путь $L_1 + L_2$ задается функцией

$$z(t) = \begin{cases} z_1(t), & \text{если } t \in [\alpha, \beta]; \\ z_2(t), & \text{если } t \in [\beta, \gamma. \end{cases}$$

Для всякой дуги кривой L можно построить дугу L^-, проходимую вдоль L от конца до начала. Формально, если $z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ – параметризация пути L, то $z\left(\beta\left(1 - \frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}\right) + \alpha\right)$ – параметризация пути L^-.

Пример 14.2. Окружность радиуса ρ с центром в точке z_0, проходимая один раз против часовой стрелки задается так: $z(t) = z_0 + \rho e^{it}$ и $0 \le t \le 2\pi$. Это гладкий непрерывный замкнутый путь. Обозначим его $c_\rho(z_0)$. Путь $c_\rho(z_0) + \ldots + c_\rho(z_0)$ (k раз), т. е. k раз проходимая окружность задается той же функцией, но $t \in [0, 2\pi k]$.

Пример 14.3. Граница квадрата $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ – сумма отрезков $L_1 + L_2 + L_3 + L_4$, где

$$L_1 : z(t) = t; \quad L_2 : z(t) = 1+it; \quad L_3 : z(t) = 1-t+i; \quad L_4 : z(t) = i(1-t);$$

и параметр t меняется всюду от 0 до 1. Граница квадрата – замкнутый, непрерывный и кусочно гладкий, но не гладкий путь (см. рис. 9).

Граница области всегда проходится так, что область остается слева. Это правило задает ориентацию границы.

Пример 14.4. Рассмотрим кольцо $r \le |z - z_0| \le R$. Его граница – кусочно гладкий, но не непрерывный путь. Она состоит из суммы $c_r(z_0)^- + c_R(z_0)$ (см. рис. 9).

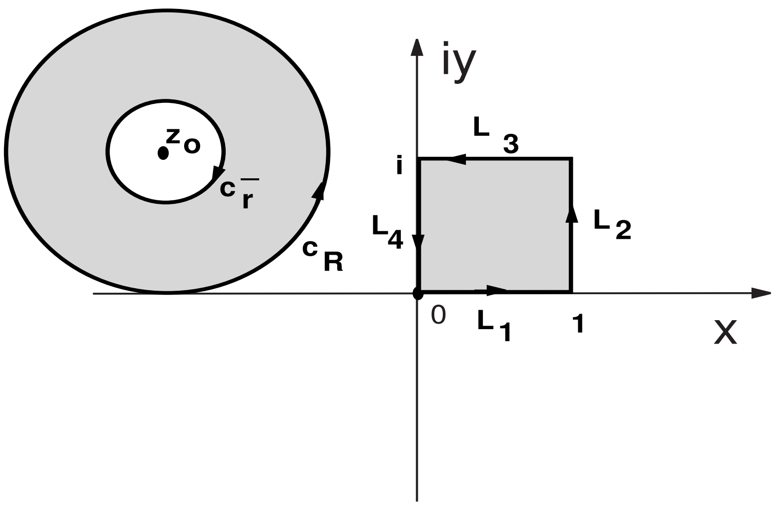

Рис. 9: Кусочно гладкие кривые.

Определение и свойства интеграла

Пусть $L : z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ – кривая. Рассмотрим *разбиение отрезка* $[\alpha, \beta]$ *с отмеченными точками*:

$$\alpha = t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_{n-1} \le t_n = \beta; \qquad \xi_j \in [t_{j-1}, t_j] \quad (1 \le j \le n)$$

Параметром разбиения назовем неотрицательное действительное число

$$\lambda = \max_{1 \le j \le n} |t_j - t_{j-1}|\,.$$

Обозначим $\Delta z_j = z(t_j) - z(t_{j-1})$. Если путь L непрерывен, то из соотношения $\lambda \to 0$ следует, что $\max\limits_j |\Delta z_j| \to 0$. Предположим, что нам задана функция $f(z)$, определенная на множестве, содержащем носитель кривой L. Составим *интегральную сумму*:

$$\sum_{j=0}^{j=n} f(z(\xi_j))\Delta z_j.$$

Определение 14.5. *Интегралом функции $f(z)$ по кривой L* называется предел интегральных сумм, если параметр разбиения стремится к 0:

$$\int\limits_L f(z)\,dz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{j=0}^{j=n} f(z(\xi_j))\Delta z_j.$$

Сформулируем без доказательства стандартные свойства интеграла

Свойство 14.6 (линейность). *Для любых $a, b \in \mathbb{C}$ и любых функций $f(z)$, $g(z)$ интегрируемых по кривой L имеет место равенство:*

$$\int\limits_L (af(z) + bg(z))\,dz = a\int\limits_L f(z)\,dz + b\int\limits_L g(z)\,dz.$$

Свойство 14.7 (аддитивность). *Если функция $f(z)$ интегрируема по сумме кривых $L_1 + L_2$, то она интегрируема по каждой кривой и*

$$\int\limits_{L_1+L_2} f(z)\,dz = \int\limits_{L_1} f(z)\,dz + \int\limits_{L_2} f(z)\,dz.$$

Свойство 14.8 (изменение знака). *Если функция $f(z)$ интегрируема по кривой L, то*

$$\int\limits_{L^-} f(z)\,dz = -\int\limits_{L} f(z)\,dz.$$

Определение 14.9. *Длиной кривой $L: \; z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$* называется точная верхняя грань сумм $\sum_{j=1}^{n} |z(t_j) - z(t_{j-1})|$ по всем разбиениям $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$.

В курсе анализа действительной переменной доказывается, что длина кусочно-гладкой кривой существует (т. е. такая кривая *спрямляема*) и выражается следующим интегралом:

$$\int\limits_{L} |dz| = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |z'(t)|\,dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \tag{23}$$

Вычислим длину единичной окружности:

$$\text{длина}(\mathbb{S}) = \int\limits_{0}^{2\pi} \left| i \cdot e^{it} \right| dt = \int\limits_{0}^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Итак: *число "пи" равно половине длины единичной окружности.* Это есть геометрический смысл числа "пи".

Свойство 14.10 (оценка интеграла). *Пусть $|f(z(t))| \le M$ для любого $t \in [\alpha, \beta]$ спрямляемой кривой L. Тогда*

$$\left| \int\limits_{L} f(z)\,dz \right| \le M \cdot \textit{длина}(L).$$

Если учесть, что $dz = dx + idy$ и

$$f(z)dz = (u + iv)(dx + idy) = udx - vdy + i(udy + vdx),$$

то формула сведения интеграла функции $f(z)$ к криволинейным интегралам получается такой:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L udx - vdy + i\int_L udy + vdx. \tag{24}$$

В частности, из этой формулы вытекает, что если кривая L кусочно-гладкая, а $f(z)$ кусочно-непрерывна, то интеграл $\int_L f(z)\,dz$ существует. Вспоминая формулу сведения криволинейного интеграла к определенному интегралу, получаем из (24) формулу для вычисления интеграла по кривой:

$$\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,dt. \tag{25}$$

Здесь $L : z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ – гладкая кривая, а функция $f(z)$ предполагается непрерывной.

Вычислим интегралы $\oint_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{dz}{(z-z_0)^n}$, где n – натуральное число, которые позже понадобятся для представления функции в виде суммы ряда.

$$\oint\limits_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d(z_0+\varepsilon e^{it})}{(\varepsilon e^{it})^n} = i\cdot\varepsilon^{1-n}\int\limits_0^{2\pi} e^{i(1-n)t}dt$$

Если $n = 1$, то этот интеграл равен $2\pi i$, иначе он равен нулю. Итак:

$$\oint\limits_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = 0 \ (n > 1); \qquad \oint\limits_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi. \tag{26}$$

Как следствие получаем: *если γ_k – окружность $|z - z_0| = \varepsilon$, проходимая против часовой стрелки k раз, то $\oint\limits_{\gamma_k} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi ki$.*

ЗАДАЧИ

1. Вычислить $\int_L \operatorname{Im} z\,dz$, если путь L является а) прямолинейным отрезком, соединяющим точку 0 с точкой $2 + i$, б) сумма отрезка, соединяющего 0 и i и отрезка, соединяющего i и $i + 2$

2. Вычислить $\int_L |z|\ dz$, если путь L является а) прямолинейным отрезком, соединяющим точку -1 с точкой 1, б) полуокружность радиуса 1 с центром в начале координат, лежащая в верхней полуплоскости (точка -1 является начальной)

15 Теорема Коши

Односвязные области. Условие потенциальности

Далее будут рассматриваться только такие области, у которых граница – кусочно гладкая кривая, как например, внутренность круга или квадрата или кольца. Область D называется *связной*, если для любых ее точек z_1 и z_2 найдется непрерывный путь L, целиком лежащий в этой области и соединяющий точки z_1 и z_2. Более жесткое требование – *односвязность* области, тот случай когда граница области одна непрерывная кусочно гладкая кривая. Примером связной, но не односвязной области является кольцо.

Напомним, что векторное поле на плоскости Oxy – это правило, ставящее в соответствие каждой точки (x, y) области D вектор $\mathbf{F}(x, y) = (F_x(x, y), F_y(x, y))$. Далее будет применяться формула Грина для односвязной области D:

$$\oint_{\partial D} F_x\, dx + F_y\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} \right) dxdy \tag{27}$$

Напомним также, что скалярная функция $\Phi(x, y)$ называется *потенциалом векторного поля* $\mathbf{F}$, если ее полный дифференциал совпадает с дифференциальной формой $F_x\, dx + F_y\, dy$, т.е. $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = F_x$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = F_y$.

Следующие условия для векторного поля $\mathbf{F}$ *эквивалентны:*

1. *криволинейный интеграл не зависит от формы кривой;*

2. *криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру равен 0;*

3. *существует потенциал.*

Если область односвязна, то эти условия эквивалентны следующему:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}.$$

Пусть функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична на замкнутой ограниченной многосвязной области D, и L – замкнутая кусочно гладкая кривая. Преобразуя интеграл $\oint_L u\,dx - v\,dy$ по формуле Грина к двойному интегралу и учитывая условия Коши-Римана, получаем, что значение этого интеграла равно нулю. Аналогично доказывается равенство $\oint_L u\,dy + v\,dx = 0$. Итак: *интеграл по замкнутому контуру от аналитической функции в односвязной области равен 0.* Это есть теорема Коши для односвязной области.

Теорема 15.1 (Коши для многосвязной области). *Интеграл по замкнутому контуру от аналитической функции в многосвязной области равен 0.*

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 0.$$

Доказательство. Разрезая, можно превратить многосвязную область в односвязную. Так, например на следующем рисунке D – двусвязная об-

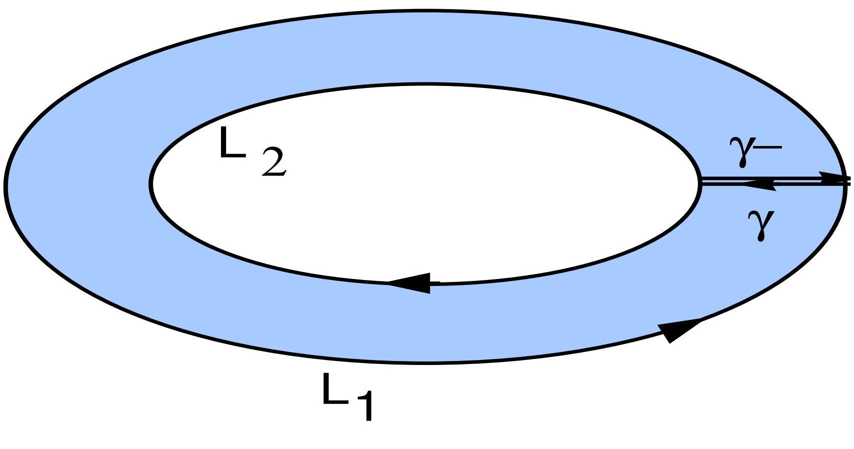

Рис. 10: Разрезание многосвязной области

ласть, ограниченная двумя гладкими кривыми L_1 и L_2. Тем самым $\partial D =$

$L_1 + L_2$. Разрезая эту область по кривой γ, получаем односвязную область $D \setminus \gamma$ с границей $L_1 + L_2 + \gamma + \gamma^-$. Интеграл от функции $f(z)$ по этой границе равен 0 по предыдущей теореме Коши. Тогда

$$\oint_{\partial D} f(z)\,dz = \oint_{\partial D} f(z)\,dz + \int_{\gamma} f(z)\,dz + \int_{\gamma^-} f(z)\,dz = \oint_{\partial(D\setminus\gamma)} f(z)\,dz = 0.$$

□

Вычисление интеграла от аналитической функции

Если интеграл от функции $f(z)$ по всякому замкнутому контуру, расположенному в некоторой области G равен 0, то интеграл по всякой дуге, находящейся внутри области G зависит только от положения начальной и конечной точки. Рассмотрим интеграл как функцию верхнего предела:

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta. \tag{28}$$

Интегрирование здесь подразумевается по любому пути, лежащему в области G и соединяющего точки z_0 и z. Докажем, что функция $F(z)$ аналитична в области G, и $F'(z) = f(z)$ (такая функция называется *первообразной для функции* $f(z)$). Заметим, что действительнозначная функция двух переменных $\Phi(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} u\,dx - v\,dy$ – потенциал векторного поля $(u, -v)$, а функция $\Psi(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v\,dx + u\,dy$ – потенциал векторного поля (v, u). Тогда

$$\frac{\partial(\Phi + i\Psi)}{\partial x} = u + iv, \qquad \frac{\partial(\Phi + i\Psi)}{\partial y} = -v + iu,$$

откуда и следует результат. Отсюда получаем формулу для функций комплексного переменного, аналогичную формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1) = F(z)\big|_{z_1}^{z_2} \tag{29}$$

Пример 15.2. Вычислим интеграл

$$\int_0^{\pi ki} e^z\,dz = e^z\,|_0^{\pi ki} = e^{\pi ki} - e^0 = \begin{cases} 0, & \text{если k четно,} \\ -2, & \text{если k нечетно.} \end{cases}$$

16 Интегральная формула Коши

Пусть $f(z)$ аналитична на замкнутой области D с границей $L = \partial D$. Выберем точку a внутри области G и рассмотрим круг $|z-a| \le \rho$ целиком лежащий внутри области D. Обозначим через c_ρ окружность $|z-a| = \rho$, проходимую один раз против часовой стрелки. Тогда по теореме Коши имеем:

$$\int\limits_{L+c_\rho^-} \frac{f(z)\,dz}{z-a} = 0 \Rightarrow \int\limits_L \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \int\limits_{c_\rho} \frac{f(z)\,dz}{z-a}. \tag{30}$$

В силу непрерывности функции $f(z)$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ для любых z на окружности c_ρ. Отсюда получаем оценку:

$$\left|\int_{c_\rho} \frac{f(z)dz}{z-a} - \int_{c_\rho} \frac{f(a)dz}{z-a}\right| = \left|\int_{c_\rho} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz\right| \le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot \text{длина}(c_\rho) = \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon.$$

В силу соотношения (30) и равенства $\int_{c_\rho} \frac{f(a)dz}{z-a} = 2\pi i f(a)$ (см. интегралы вида (26)), отсюда извлекаем неравенство

$$\left|\int_L \frac{f(z)dz}{z-a} - 2\pi i f(a)\right| \le 2\pi\varepsilon.$$

Переходя здесь к пределу $\varepsilon \to 0$, получаем *интегральную формулу Коши*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)dz}{z-a}. \tag{31}$$

Интегральную формулу удобно переписать в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \tag{32}$$

где ζ – переменная, пробегающая границу области D, а z – любая внутренняя точка области D. Тогда форму Коши (32) выражает следующий факт: *значение аналитической функции внутри области однозначно определяются значениями на границе этой области.* Ничего подобного для произвольной бесконечно дифференцируемой функции двух действительных переменных места не имеет.

Применим интегральную формулу когда L – окружность радиуса R с центром в точке $z = a$. Учитывая, что $L : z = a + Re^{i\varphi}$ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$ и $dz = Rie^{i\varphi} d\varphi$, получаем:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{i\varphi}) d\varphi. \tag{33}$$

В правой части стоит *среднее интегральное значений функции* $f(z)$ *на окружности* L. Отсюда вытекает **принцип максимума**: *модуль функции отличной от постоянной и аналитичной в некоторой области, не может ни в одной внутренней точке этой области принимать максимальное для этой области значение.*

Формула для интегрального представления производных высших порядков функции $f(z)$ получается дифференцированием (32) под знаком интеграла:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}. \tag{34}$$

17 Ряд Тейлора

Рассмотрим функцию $f(z)$ аналитическую внутри замкнутого круга D с центром в точке a. Тогда для любой внутренней точки z этого круга имеет место равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Преобразуем:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{(\zeta - a)\left(1 - \frac{z-a}{\zeta-a}\right)} =$$

$$= 1 + \frac{z-a}{\zeta - a} + \frac{(z-a)^2}{(\zeta-a)^2} + ... + \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^n} + ...$$

Почленное интегрирование дает *ряд Тейлора функции* $f(z)$:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots, \tag{35}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{D} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{36}$$

Из приведенных выше преобразований следует, что *радиус сходимости ряда Тейлора равен расстоянию от a до ближайшей особой точки, т. е. точки в которой нарушается аналитичность функции* $f(z)$.

Предложение 17.1. *Пусть* $|f(z)| \leq M$ *на окружности* $|z - a| = \rho$ *радиуса* ρ. *Тогда* $|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$.

Доказательство. Действительно,

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{\rho^{n+1}} \cdot 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n}.$$

□

Теорема 17.2 (Лиувилля). *Аналитическая и ограниченная на всей комплексной плоскости функция может быть только константной.*

Доказательство. Пусть функция $f(z)$ аналитична и $|f(z)| \leq M$ на всей комплексной плоскости. Пусть $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ – ряд Тейлора функции $f(z)$ с центром в нуле. Пользуясь оценкой $|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$ (см. предложение 17.1)и устремляя $\rho \to +\infty$, получаем равенство $c_n = 0$ при любом $n \geq 1$. Следовательно, $f(z) = c_0$ – константа. □

Как следствие этого результата получаем **основную теорему алгебры комплексных чисел**

Теорема 17.3. *Любой многочлен, не равный константе, имеет хотя бы один комплексный корень.*

Доказательство. Пусть $P(z)$ – многочлен, не имеющий ни одного корня. Тогда функция $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ аналитична на всей комплексной плоскости и ограничена в силу того, что $\lim\limits_{z \to \infty} \frac{1}{P(z)} = 0$ для любого многочлена $P(z)$ степени ≥ 1. Следовательно, по теореме Лиувилля получаем, что функция $f(z)$ константа. Значит и многочлен $P(z)$ константный. □

Определение 17.4. Точка a – *ноль кратности* n *функции* $f(z)$, *аналитической в окрестности точки* a , если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

- $c_0 = ... = c_{n-1} = 0$ и $c_n \neq 0$ (здесь c_j – коэффициенты ряда Тейлора функции $f(z)$ в точке a);
- $f(a) = f'(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0$, но $f^{(n)}(a) \neq 0$;
- $f(z) = (z - a)^n g(z)$, где $g(z)$ аналитична в точке a, и $g(a) \neq 0$.

Из разложения функции $f(z)$ в точке a в ряд Тейлора (см. (35)) и из формулы (36) сразу следует эквивалентность приведенных выше условий. Другое приложение разложения аналитической функции в ряд Тейлора состоит в следующем.

Теорема единственности и аналитическое продолжение

Теорема 17.5. *Если значения аналитических в открытой области* G *функций* $f_1(z)$ *и* $f_2(z)$ *совпадают на некоторой бесконечной последовательности точек* $z_1, z_2, z_3, ...$, *сходящейся к точке* $a \in G$, *то эти функции тождественно равны во всей этой области.*

Доказательство. Заметим сначала, что если аналитическая функция $f(z)$ не равна тождественно нулю в окрестности точки a, то найдется ненулевой коэффициент ряда Тейлора этой функции. Записывая такую функцию в виде $(z-a)^n g(z)$, где $g(a) \neq 0$, видим, что в достаточно малой окрестности точки a функция $f(z)$ других нулей, кроме a не имеет. Отсюда получаем, что разность $f_1(z)-f_2(z)$ тождественно равна 0 в некоторой окрестности точки a. В свою очередь это дает, что данная разность равна 0 в круге наибольшего радиуса с центром в точке a, вмещающегося в область G. Далее, взяв произвольную точку $z^* \in G$ и соединив точки a и z^* кусочно гладкой непрерывной кривой, можно покрыть эту кривую конечной системой кругов, так что центр последующего лежит на границе предыдущего и центр первого – точка a, центр последнего – точка z^*. Последовательно продвигаясь от первого до последнего круга, доказываем, что разность $f_1(z) - f_2(z)$ равна тождественно 0 в этих кругах, а значит и в точке z^*. Отсюда следует, что функция $f_1(z)$ тождественно совпадает с функцией $f_2(z)$. □

Предположим, что в некоторой области G задана функция $f(z)$. Если $g(z)$ аналитическая функция в области D, содержащей G, и равная $f(z)$ на G, то она называется *аналитическим продолжением* функции $f(z)$. Из теоремы 17.5 следует, что аналитическое продолжение единственно. Например, $g(z) = \frac{1}{1-z}$ является аналитическим продолжением функции $f(z) = \sum_0^\infty z^n$, заданной лишь при условии $|z| < 1$.

Пример 17.6. Функция $\sin \frac{1}{z}$ аналитична в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и не равна тождественно 0, хотя обращается в ноль в точках $\frac{1}{\pi k}$ и эта последовательность стремиться к 0 при $k \to +\infty$. Это, конечно, не противоречит, теореме 17.5, так как предельная точка – ноль, не принадлежит области аналитичности функции $\sin \frac{1}{z}$.

18 Ряд Лорана

Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольце $r < |z-a| < R$. Обозначим через c_ρ окружность радиуса ρ с центром в точке a. Тогда, в силу интегральной формулы Коши, для любой точки z из кольца $r < |z-a| < R$

имеет место равенство:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{R'}}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{c_{r'}}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}, \tag{37}$$

где числа r' и R' выбираем так, что $r<r'<|z-a|<R'<R$. Преобразуем первый интеграл:

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{(\zeta-a)\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)}=$$

$$=1+\frac{z-a}{\zeta-a}+\frac{(z-a)^2}{(\zeta-a)^2}+...+\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^n}+...$$

Почленное интегрирование дает *правильную часть ряда Лорана*:

$$c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+...+c_n(z-a)^n+\dots,$$

где

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\rho}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

и $r<\rho<R$. Преобразуем второй интеграл:

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{(z-a)\left(1-\frac{\zeta-a}{z-a}\right)}=$$

$$=-\frac{1}{z-a}\left[1+\frac{\zeta-a}{z-a}+\frac{(\zeta-a)^2}{(z-a)^2}+...+\frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^n}+...\right]$$

Почленное интегрирование дает *главную часть ряда Лорана*

$$\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{c_{-3}}{(z-a)^3}+...+\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+...,$$

где

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\rho}f(z)(z-a)^{n-1}dz,$$

и $r < \rho < R$. Складывая главную и правильную части Лорана, получаем представление функции $f(z)$ аналитической в кольце $r < |z-a| < R$ в виде суммы *ряда Лорана*

$$f(z) = \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{c_{-3}}{(z-a)^3} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} +$$

$$+c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + ... + c_n(z-a)^n + \ldots = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_m(z-a)^m,$$

где

$$c_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_\rho} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{m+1}} \quad (r < \rho < R) \tag{38}$$

при любом целом m.

Пример 18.1. Рассмотрим различные разложения в ряд Лорана функции $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, выбрав $a = 0$. Предварительно заметим, что $f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$.

Случай 1 – разложение в круге $|z| < 1$. Тогда

$$-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2} = -\frac{1}{2} - \frac{z}{2^2} - \frac{z^2}{2^3} - \ldots$$

Складывая, получаем:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)z + \left(1 - \frac{1}{2^3}\right)z^2 + \ldots$$

Случай 2 – разложение в кольце $1 < |z| < 2$. Тогда дробь $\frac{1}{z-1}$, в отличии от дроби $\frac{1}{z-2}$, раскладывается по другому:

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \ldots$$

Складывая, получаем:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{2} - \frac{z}{2^2} - \frac{z^2}{2^3} - \ldots - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \ldots$$

Случай 3 – разложение в кольце $2 < |z|$. Тогда и дробь $\frac{1}{z-2}$ раскладывается по другому:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} + \dots$$

Складывая, получаем:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z^2} + \frac{2^2-1}{z^3} + \frac{2^3-1}{z^4} + \dots$$

Заметим, что если дано разложение функции в сумму ряда Лорана в кольце $r < |z-a| < R$, то радиус сходимости правильной части больше или равен R, радиус сходимости главной части меньше или равен r и, умножая разложение функции $f(z)$ на $(z-a)^{-m}$, а затем почленно интегрируя при учете формул (26), получаем, что

$$c_m = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_\rho} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{m+1}} \tag{39}$$

для любого целого m, и в качестве ρ можно взять любое число между r и R. Отсюда вытекает *единственность ряда Лорана.* В частности, в дальнейшем важную роль будет играть следующий коэффициент ряда Лорана:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_\rho} f(z)\, dz. \tag{40}$$

ЗАДАЧИ

1. Разложить в ряд Лорана заданную функцию в окрестности точки a: а) $\frac{1}{2z-5}$, $a = 0$; б) $\frac{1}{2z-5}$, $a = \infty$; в) $\frac{e^z-1}{z^3}$, $a = 0$.

2. Найти главную часть ряда Лорана функции $\frac{\operatorname{ch} z - \cos z}{z^4}$ в окрестности точки $a = 0$.

3. Разложить в ряд Лорана функцию $2^{\frac{1}{z}}$ в окрестности точки $a = 0$.

19 Изолированные особые точки

Особая точка функции комплексного переменного это точка в которой отсутствует аналитичность. Особая точка функции $f(z)$ называется *изолированной*, если в некоторой окрестности этой точки функция $f(z)$ не имеет других особых точек. Пусть a – особая точка, и R – расстояние от a до ближайшей особой точки. Разложим $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $0 < |z-a| < R$. Рассмотрим три случая.

Случай 1. В ряде Лорана главная часть отсутствует.

Тогда, доопределяя функцию $f(z)$ в точке a посредством равенства $f(a) = c_0$, получаем аналитическую в точке a функцию, которую также будем обозначать через $f(z)$. Точка a в этом случае называется *устранимой особой точкой*.

Пример 19.1. Точка 0 для функции $\frac{\sin z}{z}$ устранима и функция

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & \text{если } z \neq 0; \\ 1, & \text{если } z = 0. \end{cases}$$

аналитична на всей комплексной плоскости.

Предложение 19.2. *В устранимой особой точке функция имеет предел. Наоборот, если аналитическая функция в изолированной особой точке ограничена, то эта особенность устранима.*

Доказательство. Первая часть предложения доказана выше. Пусть $f(z)$ имеет изолированную особенность в точке a и $f(z) = g(z) + h(z)$ – разложение на главную и правильную части в этой точке. Тогда $h(z)$ аналитична в точке a, а $g(z)$ продолжается на всю область $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ и ограничена на бесконечности. Если $f(z)$ ограничена в точке a, то и $g(z) = f(z) - h(z)$ также ограничена в точке a. Тогда функция $g(\frac{1}{\zeta} + a) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_{-n}\zeta^n$ аналитична на всей комплексной плоскости и ограничена. По теореме Лиувилля, эта функция должна быть константой. Так как при $\zeta = 0$ эта функция обращается в ноль, то $g \equiv 0$. Тем самым главная часть в разложении в ряд Лорана функции $f(z)$ отсутствует, что и требовалось доказать. □

Случай 2. Главная часть ряда Лорана ненулевая и содержит конечное число слагаемых.

Имеем:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-3}}{(z-a)^3} + \ldots + \frac{c_{-m}}{(z-a)^m}, \quad (41)$$

где $c_{-m} \neq 0$. В этом случае a называется *полюсом порядка m*. Если $m = 1$, то a называется *простым полюсом*

Предложение 19.3. *Точка a – полюс порядка m тогда и только тогда, когда $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$, где $\varphi(z)$ аналитическая и не равная 0 в точке a функция.*

Предложение 19.4. *В случае полюса имеем $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$. Наоборот, если выполнено это равенство, то a – полюс.*

Доказательство. Если $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, то $\lim\limits_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0$. Следовательно, a – устранимая особенность для функции $\frac{1}{f(z)}$ по предложению 19.2 и $\frac{1}{f(z)} = (z-a)^n\psi(z)$ для некоторого $n \geq 0$ и аналитической функции $\psi(z)$ такой, что $\psi(a) \neq 0$. Тогда $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$ для $\varphi(z) = \frac{1}{\psi(z)}$ – аналитической функции в точке a. Остается применить предыдущее предложение. □

Пример 19.5. Точки $\pm i$ – простые полюсы функции $\frac{1}{z^2+1}$.

Случай 3. Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых.

В этом случае a называется *существенной особой точкой.*

Теорема 19.6 (Ю.В. Сохоцкого). *Если a – существенная особая точка функции $f(z)$, то для любого $A \in \mathbb{C}$ или $A = \infty$ найдется последовательность $z_n \to a$ такая, что $f(z_n) \to A$.*

Доказательство. Пусть сначала $A = \infty$. Согласно предложению 19.2 функция $f(z)$ не может быть ограниченной в точке a. Следовательно, требуемая последовательность существует. Пусть теперь $A \in \mathbb{C}$. Рассмотрим функцию $g(z) = \frac{1}{f(z)-A}$. Если a устранима или является полюсом для $g(z)$, то такова же она будет и для $f(z)$. Следовательно, a – существенная особенность функции $g(z)$. Пусть последовательность $z_n \to a$ такова, что $g(z_n) \to \infty$. Тогда $f(z_n) \to A$. $\square$

Пример 19.7. Точка 0 – существенная особенность функции $e^{\frac{1}{z}}$, так как разложение в ряд Лорана для этой функции в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ имеет вид

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^3 3!} + \dots$$

Для последовательности $z_n = \frac{1}{n}$ имеем: $\lim e^{\frac{1}{z_n}} = \infty$ а для последовательности $\tilde{z}_n = \frac{1}{2\pi n i}$, также сходящейся к 0, имеем: $\lim e^{\frac{1}{\tilde{z}_n}} = 0$.

ЗАДАЧИ

1. Найти особые точки функции и указать их тип (для полюса указать также порядок)

$$a) \quad \frac{z+2}{(z-1)^2 z(z+1)}; \quad b) \quad \frac{1-\cos z}{z^4}; \quad c) \quad \frac{\operatorname{tg}(z-1)}{z-1}$$

$$d) \quad \operatorname{tg}\frac{1}{z-1}; \quad e) \quad \operatorname{tg}^2 z; \quad f) \quad \frac{1}{(z^2+i)^2}.$$

2. Является ли точка 0 изолированной особенностью для функции а) $\operatorname{tg}\frac{1}{z}$, б) $\sin\frac{1}{z}$?

3. Является ли бесконечно удаленная точка0 изолированной особенностью для функции а) $\operatorname{tg} z$, б) e^z.

4. Найти последовательность $z_n \to \infty$ такую, что а) $\lim(\sin z_n) = 0$, б) $\lim(\sin z_n) = \infty$, в) $\lim(\sin z_n) = 1$.

20 Основная теорема о вычетах

Определение 20.1. Пусть в проколотой окрестности точки a функция $f(z)$ аналитична. Тогда величину

$$\operatorname{Res}[f(z), a] = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-a|=\rho} f(z)\, dz, \tag{42}$$

где ρ – достаточно малое положительное число, будем называть *вычетом функции $f(z)$ в точке a.*

Вычетом функции относительно бесконечно удаленной точки считаем величину $\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C^-} f(z)\, dz$, где C – окружность с центром в начале координат такая, что вне круга, определяемого этой окружностью, функция $f(z)$ особенностей не имеет.

Первичные следствия этого определения следующие:

А) *вычет не зависит от величины ρ;*

Б) *вычет совпадает с коэффициентом c_{-1} ряда Лорана функции $f(z)$ в кольце $0 < |z-a| < \rho$ (см. формулу (40));*

В) *если $f(z)$ аналитична в точке a или a – устранимая особенность, то вычет в ней равен 0.*

Предложение 20.2. *Пусть a – полюс порядка m функции $f(z)$. Тогда*

$$\operatorname{Res}[f(z), a] = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z\to a} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} [(z-a)^m f(z)] \tag{43}$$

Доказательство. Если a – полюс порядка m, то

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + g(z),$$

где $g(z)$ – правильная часть, т. е. аналитическая функция в точке a. Тогда

$$(z-a)^m f(z) = c_{-m} + \ldots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + (z-a)^m g(z).$$

Дифференцируя это соотношение $m-1$ раз, получим:

$$\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right] = (m-1)!c_{-1} + h(z),$$

где $h(a)=0$. Переходя к пределу и разделив на $(m-1)!$, получим требуемую формулу. $\square$

Отметим частный случай простого полюса

Предложение 20.3. *Пусть a – простой полюс функции $f(z)$. Тогда*

$$\mathrm{Res}[f(z),a] = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) \tag{44}$$

В частности, если $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$, где $g(z),h(z)$ аналитичны в окрестности точки a и $g(a)\neq 0$, $h(a)=0$, $h'(a)\neq 0$, то a – простой полюс и

$$\mathrm{Res}[f(z),a] = \frac{g(a)}{h'(a)} \tag{45}$$

Доказательство. Требует доказательства только утверждение "в частности". Из условия следует, что $h(z)=(z-a)\cdot s(z)$ для некоторой аналитичной функции $s(z)$ такой, что $s(a)\neq 0$. Тогда $f(z)=\frac{1}{z-a}\cdot\frac{g(z)}{s(z)}$ и $\frac{g(a)}{s(a)}\neq 0$. Следовательно, a – простой полюс. Далее, переходя в следующем соотношении

$$(z-a)f(z) = \frac{g(z)}{(h(z)-h(a))/(z-a)}$$

к пределу $z\to a$, получаем формулу $\mathrm{Res}[f(z),a]=\frac{g(a)}{h'(a)}$. $\square$

Теорема 20.4 (основная о вычетах). *Пусть $f(z)$ аналитична в замкнутой области D, кроме точек $a_1, a_2, ..., a_m$, лежащих внутри области D. Тогда*

$$\oint_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i(\mathrm{Res}[f(z),a_1] + \mathrm{Res}[f(z),a_2] + ... + \mathrm{Res}[f(z),a_m]) \tag{46}$$

Доказательство. Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_m$ – окружности достаточно малых радиусов с центрами в точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такие, что круги $K_1, \ldots, K_m$ ими ограничиваемые, целиком лежат внутри области D. Тогда $f(z)$ аналитична в области $D \setminus (K_1 \cup \ldots \cup K_m)$ и по теореме Коши имеет место равенство:

$$\oint_{\partial D - c_1 - \ldots - c_m} f(z)\, dz = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\oint_{\partial D} f(z)\, dz = \oint_{c_1 + \ldots + c_m} f(z)\, dz =$$

$$= \oint_{c_1} f(z)\, dz + \ldots + \oint_{c_m} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), a_1] + \ldots + 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), a_m],$$

что и требовалось доказать. □

Пример 20.5. Вычислим интеграл:

$$\int_{|z|} \frac{dz}{z^3 - 5z^2 + 4z} = 2\pi i \left[\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3 - 5z^2 + 4z}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3 - 5z^2 + 4z}, 1\right)\right] =$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{z^2 - 5z + 4}/_{z=0} + \frac{1}{z(z-4)}/_{z=1}\right] = 2\pi i \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{\pi i}{6}.$$

21 Вычисление интегралов с помощью вычетов

Предложение 21.1. *Предположим, что бесконечно удаленная точка является нулем второго или более высокого порядка функции $f(z)$, т.е. разложение в ряд Лорана в окрестности ∞ имеет вид*

$$f(z) = \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \frac{c_{-4}}{z^4} + \ldots$$

Допустим также, что $f(z)$ является аналитической функцией на действительной оси, а в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ имеет лишь конечное число особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{j=n} \operatorname{Res}[f(z), a_j] \tag{47}$$

Доказательство. Все лежащие в верхней полуплоскости особые точки можно заключить внутрь расположенного в верхней полуплоскости полукруга достаточно большого радиуса R с центром в начале координат. По основной теореме о вычетах получаем

$$\int\limits_L f(z)\,dz + \int\limits_{-R}^{+R} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), a_j], \tag{48}$$

где L – верхняя полуокружность радиуса R, проходимая против часовой стрелки. Так как $f(z) = \frac{g(z)}{z^2}$, где $g(z)$ – ограничена на бесконечности, например, числом M, то

$$\left|\int\limits_L f(z)\,dz\right| = \left|\int\limits_L \frac{g(z)dz}{z^2}\right| \le \frac{M}{R^2}\cdot \pi R = \frac{M\pi}{R} \to 0$$

при $R \to +\infty$. Тогда, переходя в соотношении (48) к пределу $R \to +\infty$, получаем требуемое равенство. □

Пример 21.2. Вычислим интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i \operatorname{Res}[\frac{1}{(z^2+1)^2}, i] = 2\pi i(-1/4i) = \frac{\pi}{2}.$$

Предложение 21.3 (лемма Жордана). *Пусть $f(z) = e^{imz}F(z)$, причем $m > 0$, и $F(z) \to 0$, когда $z \to \infty$ по любому закону, оставаясь, однако в области $\operatorname{Im} z \ge 0$. Предположим, кроме того, что $f(z)$ аналитична, а в верхней полуплоскости имеет не более конечного числа особых точек $a_1, a_2, ..., a_n$. Тогда*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{j=n} \operatorname{Res}[f(z), a_j] \tag{49}$$

Пример 21.4. Вычислим интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x\,dx}{x^2-2x+10} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{ze^{iz}\,dz}{z^2-2z+10} = \operatorname{Re}\left\{2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}, 1+3i\right]\right\} =$$

$$= \operatorname{Re}\left\{2\pi i\frac{(1+3i)e^{-3+i}}{6i}\right\} = \frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1 - 3\sin 1).$$

Пример 21.5 (Интеграл Дирихле). Вычислим следующий интеграл:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx\right\}$$

Имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx = \pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z}, 0\right] = \pi i.$$

Отсюда следует равенство:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

ЗАДАЧИ

1. Найти вычеты следующих функций относительно каждого из полюсов а) $\frac{z^2+1}{z-2}$, б) $\frac{1}{(z^2+1)^2}$, в) $\operatorname{tg} z$, г) $\frac{\cos z}{z-i}$.
2. Найти вычеты относительно точки 0 функций а) $e^{1/z}$, б) $\cos 1/z$, в) $\sin 1/z$.
3. Вычислить а) $\oint_{x^2+y^2=2x}\frac{dz}{z^4+1}$, б) $\oint_{x^2+y^2=2x+2y}\frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$.
4. Вычислить с помощью вычетов интегралы функций действительного переменного: а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{x^2+9}$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x\,dx}{x^2+4x+20}$.

Литература

[БН] Я.С. Бугров, С.М. Никольский. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного, (Глава 6) Наука, 1989

[ЛЭ] Г.Л. Лунц, Л.Э. Эльсгольц. Функции комплексного переменного. С-Пб, 2002.

[ЛШ] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного, Гостехиздат, 1951